ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ

ಮೊದಲನೆಯ ಬಿ.ಎಸ್‌ಸಿ. ತರಗತಿಗೆ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ

ಜಿ. ಟಿ. ನಾರಾಯಣರಾವ್

ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಪ್ರಕಾಶನ ವಿಭಾಗ
1968

ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ

ಮೊದಲನೆಯ ಬಿ.ಎಸ್‌ಸಿ. ತರಗತಿಗೆ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ

ಜಿ. ಟಿ. ನಾರಾಯಣರಾವ್

ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಪ್ರಕಾಶನ ವಿಭಾಗ
1968

ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಪ್ರಕಾಶನ ವಿಭಾಗ

ಪ್ರಧಾನ ಸಂಪಾದಕರು: ಡಾ॥ ರಂ. ಶ್ರೀ. ಮುಗಳಿ

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ: 4

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಸಂಪಾದಕ ಸಮಿತಿ: ಪ್ರೊ॥ ಎಫ್. ಜೆ. ನೊರೊನ್ಹಾ (ಅಧ್ಯಕ್ಷರು)
ಡಾ॥ ಸಿ. ಎನ್. ಶ್ರೀನಿವಾಸ ಅಯ್ಯಂಗಾರ್
ಶ್ರೀ ಆರ್. ಗುರುರಾಜರಾವ್
ಶ್ರೀ ಹೆಚ್. ವಿ. ಸುಬ್ಬನರಸಿಂಹಯ್ಯ
ಶ್ರೀ ಜಿ. ಟಿ. ನಾರಾಯಣರಾವ್

ಬೆಲೆ ರೂ. 3-20

ಮುದ್ರಣ: ಬೆಂಗಳೂರು ಪ್ರೆಸ್, ಬೆಂಗಳೂರು 18

ವ್ಯಾಪಾರ ಸಂಬಂಧ ಪತ್ರವ್ಯವಹಾರ:

Bangalore University Consumers' Cooperative Society, Ltd.,
Gandhinagar, Bangalore 9

ಮುನ್ನುಡಿ

ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲಿ ಕಾಲೇಜು ಮಟ್ಟದ ವಿದ್ಯಾ ವ್ಯಾಸಂಗ ಮಾಡಬೇಕು ಎಂದು ಬಯಸುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ತಕ್ಕ ಸೌಕರ್ಯಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸಿ ಕೊಡಬೇಕು; ಜೊತೆಯಲ್ಲಿಯೇ, ಉನ್ನತ ಮಟ್ಟದ ಜ್ಞಾನದಾನವು ಮಾತೃಭಾಷೆಯಲ್ಲಿಯೇ ನಡೆಯಲು ಸಮರ್ಪಕ ವಾತಾವರಣವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು—ಇವೆರಡು ಉದ್ದೇಶಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯವು ಜನವರಿ 1967ರಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರವನ್ನು ಕೈಗೊಂಡಿತು. ಅದು ಅಖಿಲ ಭಾರತೀಯ ವಿದ್ಯಾಧೋರಣೆಗೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿಯೂ ಇತ್ತು.

ಇದರ ಅಂಗವಾಗಿ, 1967–68ರ ಪ್ರೀಯುನಿವರ್ಸಿಟಿ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಐಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮವನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ, ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮದ ಒಂದು ವಿಭಾಗವನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಬಹುದೆಂದು ಕಾಲೇಜುಗಳಿಗೆ ಆದೇಶ ನೀಡಲಾಯಿತು. ಜೊತೆಯಲ್ಲಿಯೇ ಯೋಗ್ಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಕನ್ನಡ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಒದಗಿಸಿಕೊಡುವ ಹೊಣೆಗಾರಿಕೆಯನ್ನು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯವು ವಹಿಸಿಕೊಂಡಿತು. ಇದರ ನಿರ್ವಹಣೆಗಾಗಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಮಿತಿಯು ರೂಪುಗೊಂಡಿತು. ಡಾ॥ ರಂ. ಶ್ರೀ. ಮುಗಳಿಯವರ ಅಧ್ಯಕ್ಷತೆಯಲ್ಲಿ ನೇಮಕವಾದ ಈ ಸಮಿತಿಯು ಹೊಸದಾರಿಯಲ್ಲಿ ಉತ್ಸಾಹದಿಂದ ನಡೆದು ಇದೀಗ ಹಲವಾರು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟಗೊಳಿಸುತ್ತಿದೆ.

ಇಂತಹ ಒಂದು ಪವಿತ್ರ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ಸಹಾಯಕವಾಗಿರುವ ಶಕ್ತಿಗಳು ಹಲವಾರು—ವಿವಿಧ ವಿಷಯಗಳ ಸಂಪಾದಕ ಮಂಡಳಿಗಳು, ಲೇಖಕರು, ಭಾಷಾ ತಜ್ಞರು, ಮುದ್ರಣಕಾರರು, ಮೊದಲಾದವರು; ಮತ್ತು ಇವರನ್ನೆಲ್ಲ ಒಂದುಗೂಡಿಸಿ ಕ್ಷಿಪ್ರವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಗುರಿ ಸಾಧಿಸಿರುವ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಮಿತಿ. ಇವರೆಲ್ಲರಿಗೂ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯವು ಋಣಿಯಾಗಿದೆ; ಅವರ ವಿಶ್ವಾಸಪೂರ್ಣ ಸೇವೆಯನ್ನು ಮೆಚ್ಚಿಕೊಂಡಿದೆ.

ಕನ್ನಡ ಭಾಷೆ ಬೆಳೆಯದೇ ವಿಶ್ವದ ಆಧುನಿಕ, ವಿಶೇಷವಾಗಿ, ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಅದರಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ; ಸಾಕಷ್ಟು ಗ್ರಂಥಗಳು ಬರದೇ ಭಾಷೆ ಬೆಳೆಯುವಂತಿಲ್ಲ. ಈ ವಿಷವರ್ತುಲಭೇದನದ ದಾರಿ ಒಂದೇ—ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯವು ತಜ್ಞರ ನೆರವಿನಿಂದ ಗ್ರಂಥರಚನೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಬೇಕು. ಮೊದಲ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಎದುರಾಗುವ ತೊಡರುಗಳು ಹಲವಾರು—ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಲ್ಲ ತಜ್ಞರು ಯಾರು? ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳ ವಿಚಾರವೇನು? ಯಾರಿಗಾಗಿ

ಬರೆಯುವುದು? ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಮಿತಿಯ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಕಾರ್ಯವು ಇವೆಲ್ಲ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೂ ಸ್ವಲ್ಪಮಟ್ಟಿಗಾದರೂ ಉತ್ತರ ನೀಡಿದೆ.

ಮುಂಬರುವ ದಿವಸಗಳಲ್ಲಿ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳೂ, ಇತರ ಪುಸ್ತಕಗಳೂ ವಿಪುಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟಿತವಾಗಿ ಕನ್ನಡದ ಸಜೀವ ಮಾಧ್ಯಮದ ಮೂಲಕ ಪ್ರಪಂಚದ ಅತ್ಯುತ್ತಮ ಜ್ಞಾನವು (ಅತ್ಯಾಧುನಿಕ ಜ್ಞಾನ ಸಹ) ಕನ್ನಡ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ದೊರೆಯುವುದೆಂದು ಹಾರೈಸುತ್ತೇನೆ.

ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ,
ಬೆಂಗಳೂರು,
5–6–1968

ವಿ. ಕೃ. ಗೋಕಾಕ್,
ಉಪಕುಲಪತಿ

ನಾಲ್ಕು ಮಾತು

ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯವು ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸದ ಮಾಧ್ಯಮದ ವಿಚಾರದಲ್ಲಿ ಕೂಲಂಕಷವಾಗಿ ಆಲೋಚಿಸಿ ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಭಾಷೆಯೇ ಉಚ್ಚ ವ್ಯಾಸಂಗದಲ್ಲಿಯೂ ಮಾಧ್ಯಮವಾಗಬೇಕೆಂಬ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬಂದಿತು. ಆದರೆ ಸದ್ಯದ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಐಚ್ಛಿಕವಾಗಿಡುವುದು ಯುಕ್ತ ಎಂಬ ನಿರ್ಣಯವನ್ನು ಅದು ಕೈಗೊಂಡು ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ರಚನೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಕಟನೆಗಳಿಗೆ ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಮಿತಿ ಒಂದನ್ನು ನೇಮಕ ಮಾಡಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮಿತಿಯ ಪರವಾಗಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವುದಕ್ಕೆಂದು ಅನುಭವಿಕರಾದ ಅಧ್ಯಾಪಕರನ್ನು ಕೇಳಿಕೊಳ್ಳಲಾಯಿತು. ಆಯಾ ವಿಷಯಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಪಠ್ಯಸಮಿತಿಯ ಸದಸ್ಯರಾಗಲಿ, ಪಠ್ಯಸಮಿತಿ ಗೊತ್ತುಪಡಿಸಿದ ಸಂಪಾದಕ ಸಮಿತಿಯ ಅಧ್ಯಕ್ಷರಾಗಲಿ, ಸದಸ್ಯರಾಗಲಿ ಲೇಖಕರಿಂದ ಬರುವ ಹಸ್ತಪ್ರತಿಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕೆಂದು ಬಿನ್ನವಿಸಲಾಯಿತು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹಸ್ತಪ್ರತಿಯನ್ನು ಭಾಷಾ ತಜ್ಞರಿಂದ ನೋಡಿಸಬೇಕೆಂದೂ ಗೊತ್ತಾಯಿತು. ಈ ಎಲ್ಲ ಬಗೆಯ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಗೆ ಒಳಪಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ಪರಿಪೂರ್ಣವೂ ನಿರ್ದುಷ್ಟವೂ ಆದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವು ರಚಿತವಾಗಬೇಕೆಂದೂ ಅದು ಸೊಗಸಾಗಿ ಮುದ್ರಿತವಾಗಬೇಕೆಂದೂ ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಸಮಿತಿ ಪ್ರಾಮಾಣಿಕ ಪ್ರಯತ್ನಗಳನ್ನು ಮಾಡುತ್ತಿದೆ. ಪಠ್ಯವೆಂಬ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಮಾತ್ರವಲ್ಲ—ಕನ್ನಡ ಜನಕ್ಕೆ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿಯೆ ಉತ್ತಮ ಜ್ಞಾನವು ಉಪಲಬ್ಧವಾಗಲಿ ಎಂಬ ವ್ಯಾಪಕವಾದ ಉದ್ದೇಶವೂ ಈ ಮಹಾ ಕಾರ್ಯದ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಲ್ಲಿದೆ.

ಈ ಕಾರ್ಯವು ಎಷ್ಟು ಯಶಸ್ವಿಯಾಗುವುದೋ ಅಷ್ಟು ವೇಗದಿಂದ ಐಚ್ಛಿಕವಾದ ಮಾಧ್ಯಮವು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗುತ್ತದೆ. ಕಡ್ಡಾಯವಾದ ಮಾಧ್ಯಮವೆನಿಸಿಕೊಳ್ಳದೆ ಕಡ್ಡಾಯವಾಗಿ ಅದನ್ನೇ ಸ್ವೀಕರಿಸಬೇಕು ಎಂಬ ಇಚ್ಛೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಾಣಮಾಡುತ್ತದೆ. ಮಾಧ್ಯಮದ ವಿಚಾರವಾಗಿ ನಮ್ಮ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಬಗೆಯ ಸಾಧಕ ಬಾಧಕ ಚರ್ಚೆ ನಡೆದಿದೆ. ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಜ್ಞಾನದ ಕೆಲಸ ಮತ್ತು ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿ ಇವೆರಡು ಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ನಾಗರಿಕ ಇವರ ದಾರಿಯಲ್ಲಿ ಪರಕೀಯ ಭಾಷೆಯ ಅಡ್ಡಿ ಆತಂಕಗಳನ್ನು ಒಡ್ಡದೆ ಅವರವರ ಸ್ವಂತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಜ್ಞಾನಸಾಮಗ್ರಿಯನ್ನು ಒದಗಿಸಿದರೆ ಮಾತ್ರ ಪ್ರಜಾಪ್ರಭುತ್ವ ಸಾರ್ಥಕವಾಗುತ್ತದೆ. ನಿರ್ಮಾಣಶೀಲವಾದ ವಿಚಾರವಂತಿಕೆ ಮತ್ತು ಮುಕ್ತರೀತಿಯ ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿ ಇವುಗಳಿಗೆ ಅವಕಾಶ

ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಈ ದೃಷ್ಟಿಯನ್ನು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಸಮಿತಿ ನಿಷ್ಠೆಯಿಂದ ಕಾರ್ಯಪ್ರವೃತ್ತವಾಗಿದೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಯೋಜನೆಗೆ ರೂಪಕೊಟ್ಟು ಅದನ್ನು ಕಾರ್ಯಗತ ಮಾಡುವ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಸೂಕ್ತ ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಕೈಗೊಂಡು ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಮಿತಿಗೆ ಎಲ್ಲ ಬಗೆಯ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನ ಮಾಡುತ್ತಿರುವ ಮತ್ತು ಈ ಪುಸ್ತಕಕ್ಕೆ ಮುನ್ನುಡಿ ಬರೆದಿರುವ ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಉಪಕುಲಪತಿಗಳಾಗಿರುವ ಡಾ॥ ವಿ. ಕೆ. ಗೋಕಾಕ್ ಅವರಿಗೆ ನಮ್ಮ ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ವಂದನೆಗಳು. ನಮ್ಮ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ಸರ್ವ ವಿಧವಾದ ನೆರವನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿರುವ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ರಿಜಿಸ್ಟ್ರಾರ್ ಶ್ರೀ ಪಿ. ಮಲ್ಲಿಕಾರ್ಜುನಪ್ಪನವರಿಗೂ ನಮ್ಮ ಹಾರ್ದಿಕ ಧನ್ಯವಾದಗಳು.

ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಶ್ರಮವಹಿಸಿ ಬರೆದಿರುವ ಶ್ರೀ ಜಿ. ಟಿ. ನಾರಾಯಣ ರಾಯರಿಗೆ, ಇದನ್ನು ಪರಿಶೋಧಿಸಿ ಮುದ್ರಣಕ್ಕೆ ಶಿಫಾರಸು ಮಾಡಿದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಸಂಪಾದಕ ಮಂಡಳಿಯ ಅಧ್ಯಕ್ಷ ಪ್ರೊ॥ ಎಫ್. ಜೆ. ನೊರೊನ್ಹಾರವರಿಗೆ ಮತ್ತು ಸದಸ್ಯ ಡಾ॥ ಸಿ. ಎನ್. ಶ್ರೀನಿವಾಸ ಅಯ್ಯಂಗಾರ್ಯರಿಗೆ ನಮ್ಮ ವಂದನೆಗಳು. ಇದನ್ನು ಅಂದವಾಗಿ ಮುದ್ರಿಸಿದ ಬೆಂಗಳೂರು ಪ್ರೆಸ್ಸಿಗೆ ನಾವು ಕೃತಜ್ಞರು.

ಪಠ್ಯಸಮಿತಿಯ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ನನಗೆ ನಿತಾಂತ ಉತ್ಸಾಹದಿಂದಲೂ ಶ್ರದ್ಧೆಯಿಂದಲೂ ಸಹಾಯ ನೀಡುತ್ತಿರುವ ಶ್ರೀ ಜಿ. ಟಿ. ನಾರಾಯಣರಾಯರಿಗೂ ನಾನು ಹಾರ್ದಿಕ ಧನ್ಯವಾದಗಳನ್ನು ಸಲ್ಲಿಸುತ್ತೇನೆ.

ರಂ. ಶ್ರೀ. ಮುಗಳಿ,
ಪ್ರಧಾನ ಸಂಪಾದಕ,
ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಮಿತಿ

ಅರಿಕೆ

ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಗಣಿತ ವಿಭಾಗದ ಮುಖ್ಯಾಧಿಕಾರಿಗಳಾಗಿರುವ ಪ್ರೊ|| ಎಫ್. ಜೆ. ನೊರೊನ್ಹಾ ಅವರ ಪ್ರೇರಣೆ ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಗಳ ಫಲ ಈ ಪುಸ್ತಕ. ಅವರ ಸೌಹಾರ್ದಯುತ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನ ನಿರಂತರವಾಗಿ ನನಗೆ ಲಭಿಸಿದೆ.

ಡಾ|| ಸಿ. ಎನ್. ಶ್ರೀನಿವಾಸ ಅಯ್ಯಂಗಾರ್ಯರು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾವವನ್ನೂ, ಅದರ ಭಾಷೆಯನ್ನೂ, ಸಮಗ್ರವಾದ ಚೌಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಅದರ ಸ್ಥಾನವನ್ನೂ ಕೂಲಂಕಷವಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ, ಹೊಸ ದಾರಿಯನ್ನು ತೋರಿಸಿ ನನ್ನನ್ನು ನಡೆಸಿಕೊಂಡು ಹೋಗಿದ್ದಾರೆ.

ಈ ಹಿರಿಯ ಮಹನೀಯರಿರ್ವರ ಶಾಸ್ತ್ರನಿಷ್ಠೆ, ಸಹಜ ಔದಾರ್ಯಗಳ ಫಲ ನನಗೆ ಯಥೇಚ್ಛವಾಗಿ ದೊರೆತದ್ದು ಪರಮ ಭಾಗ್ಯವೆಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇನೆ. ಅವರಿಗೆ ನನ್ನ ಕೃತಜ್ಞತಾಪೂರ್ವಕ ವಂದನೆಗಳು.

ನನ್ನಿಂದ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಬರೆಸಿ ಗೌರವಿಸಿದ ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆ, ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಮಿತಿಯ ಅಧ್ಯಕ್ಷರಾಗಿರುವ ಡಾ|| ರಂ. ಶ್ರೀ. ಮುಗಳಿಯವರಿಗೆ, ನಾನು ಋಣಿಯಾಗಿದ್ದೇನೆ.

ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಬರೆದವರು ಶ್ರೀ ವಿ. ಜಿ. ಒಡೆಯರ್ ಅವರು. ಕರಡು ಪ್ರತಿಗಳನ್ನು ಶ್ರದ್ಧೆಯಿಂದ ಓದಿ ತಿದ್ದಿದವರು ಶ್ರೀ ಫಣೀಂದ್ರ ಸಿಂಹ. ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಪುನಃ ಪರಿಶೀಲನೆ ಮಾಡಿ ಪರಿಷ್ಕರಿಸಿದವರು ಶ್ರೀಮತಿ ಎಂ. ಕೆ. ಇಂದಿರಾದೇವಿಯವರು. ಬೆಂಗಳೂರು ಪ್ರೆಸ್ಸಿನ ಅಧಿಕಾರಿಗಳ ಕಲಾಪ್ರಿಯತೆಯು ಈ ಪುಸ್ತಕದ ಸೌಂದರ್ಯವನ್ನು ವರ್ಧಿಸಿದೆ. ಇವರೆಲ್ಲರಿಗೂ ನನ್ನ ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ಧನ್ಯವಾದಗಳು.

ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಕುರಿತು ಒಂದು ಮಾತು. ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಪರಿಷ್ಕೃತ ಪಠ್ಯಪಟ್ಟಿಯ ಪ್ರಕಾರ ಒಂದನೆಯ ಬಿ.ಎಸ್‌ಸಿ. ಡಿಗ್ರಿ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗಾಗಿ ಇದನ್ನು ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಪುಸ್ತಕವು ಸ್ವಯಂಪೂರ್ಣವಾಗಿರಬೇಕೆನ್ನುವ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಮೊದಲಿನ ನಾಲ್ಕು ಅಧ್ಯಾಯಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತದ 4.4 ನೆಯ ಪರಿಚ್ಛೇದದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಪ್ರೊ|| ಸಿ. ಟಿ. ರಾಜಗೋಪಾಲರ ಒಂದು ಲೇಖನದಿಂದಲೂ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಪುಟ 171 ರಲ್ಲಿರುವ 2 ನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪ್ರೊ|| ಬಿ. ಬಿ. ಬಾಗಿಯವರ ಗ್ರಂಥದಿಂದಲೂ ಆಯ್ದಿದ್ದೇನೆ. ಈ ಪುಸ್ತಕ

ಬರೆಯುತ್ತಿರುವಾಗ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿರುವ ಸೋಮರ್ವಿಲ್, ಆಸ್ಕ್ವಿತ್, ರಾಘವಶಾಸ್ತ್ರಿ ಈ ಮಹನೀಯರ ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ ಗ್ರಂಥಗಳಿಂದಲೂ, ಹಾಬ್ಸನ್, ಲೋನಿ, ಬಾಗಿ ಈ ಮಹನೀಯರ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ ಗ್ರಂಥಗಳಿಂದಲೂ, ಹಲವಾರು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಜರ್ನಲ್‌ಗಳಿಂದಲೂ ನಾನು ನೆರವನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದೇನೆ.

ಸರ್ಕಾರೀ ಕಾಲೇಜ್,
ಬೆಂಗಳೂರು 1,
13–7–1968

ಜಿ. ಟಿ. ನಾರಾಯಣರಾವ್

ವಿಷಯಾನುಕ್ರಮಣಿಕೆ

ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ

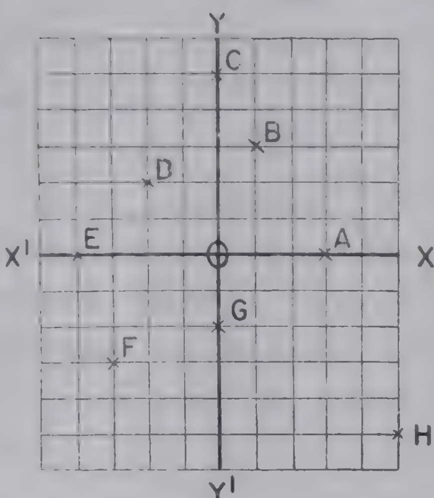
ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ

ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ

ಒಂದನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯ

ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

1.1 ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆ—ಒಂದು ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಸಮಾನ ದೂರಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾನಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಎರಡು ಗಣಗಳನ್ನು ರಚಿಸೋಣ. ಇವು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿವೆಯೆಂದೂ ತಿಳಿಯೋಣ. ಒಂದು ಚಾಪೆಯನ್ನು ಹೆಣೆದಂತಹ ಚಿತ್ರ ಈಗ ಕಾಣುವುದು. (ಚಿತ್ರ 1.1). ಇವು ಕಾಗದವನ್ನು ಹಲವಾರು ಸಮಾನ ಗಾತ್ರದ ಚೌಕಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುವುವು. ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಎರಡು ಗಣಗಳಿಂದ, ಒಂದೊಂದರಿಂದ ಒಂದೊಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಆರಿಸಿ, ಅವುಗಳನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ದಪ್ಪವಾಗಿ ಚಿತ್ರಿಸಿದರೆ, ಅವು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿವೆಯೆಂದೂ, ಕಾಗದದ ಸಮತಲವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಸ್ಪಷ್ಟಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುವುವೆಂದೂ ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಾಣುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 1.1

ಸ್ಪಷ್ಟತೆಯ ಸೌಕರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ಈ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಅಡ್ಡ ಮತ್ತು ನೀಟವಾಗಿ ಆರಿಸೋಣ. ಇವು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು O ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ಅಡ್ಡ ರೇಖೆಯನ್ನು x–ಅಕ್ಷವೆಂದೂ, ನೀಟರೇಖೆಯನ್ನು y–ಅಕ್ಷವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ; ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ $x'ox$, $y'oy$ ಎಂದು ಅಂಕಿತ ನೀಡುತ್ತೇವೆ. O ವನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದು ಅಥವಾ ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ಮೂಲ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಸಮತಲದ ನಾಲ್ಕು ವಿಭಾಗಗಳನ್ನು ಈಗ ಕ್ರಮವಾಗಿ xoy, yox', $x'oy'$ ಮತ್ತು $y'ox$ ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಬಹುದು. ಇಂತಹ ಒಂದೊಂದು ವಿಭಾಗವನ್ನೂ ಸಮತಲದ ಒಂದೊಂದು ಪಾದ (Quadrant) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. xoy ಒಂದನೆಯ ಪಾದ, yox' ಎರಡನೆಯ ಪಾದ, $x'oy'$ ಮೂರನೆಯ ಪಾದ ಮತ್ತು $y'ox$ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪಾದ. ಹೀಗೆ ವಿಭಾಗಗೊಂಡ ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಇರುವ ಪ್ರತಿಬಿಂದುವನ್ನೂ ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾಗಿ ಗುರುತಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. ಚಿತ್ರ 1.1 ರಲ್ಲಿ ಎಂಟು ವಿಶಿಷ್ಟ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದ್ದೇವೆ. A ಯನ್ನು ತಲುಪಲು

ox ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಮೂರು ಸಮಾನ ದೂರಗಳನ್ನೂ oy ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆ ದೂರವನ್ನೂ ಗಮಿಸಬೇಕು. E ಯನ್ನು ತಲುಪಲು ox' ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಸಮಾನದೂರಗಳನ್ನೂ oy ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆ ದೂರವನ್ನೂ ಗಮಿಸಬೇಕು. C ಮತ್ತು G ಗಳನ್ನು ತಲುಪಲು ox ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆ ದೂರವನ್ನೂ oy, oy' ದಿಕ್ಕುಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಐದು ಮತ್ತು ಎರಡು ಸಮಾನ ದೂರಗಳನ್ನೂ ಗಮಿಸಬೇಕು. B ಮತ್ತು H ಗಳನ್ನು ತಲುಪಲು ox ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಒಂದು ಮತ್ತು ಐದು ಸಮಾನ ದೂರಗಳನ್ನೂ, oy, oy' ದಿಕ್ಕುಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮೂರು ಮತ್ತು ಐದು ಸಮಾನ ದೂರಗಳನ್ನೂ ಗಮಿಸಬೇಕು.

ox, oy ದಿಕ್ಕುಗಳನ್ನು x ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷಗಳ ಧನದಿಕ್ಕುಗಳೆಂದೂ, ox', oy' ದಿಕ್ಕುಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಋಣದಿಕ್ಕುಗಳೆಂದೂ ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು ಇದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಆಯಾ ದೂರಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದರ ಪ್ರಕಾರ A ಯು $+3, 0$ ದೂರದಲ್ಲಿದೆ; F ಬಿಂದು $-3, -3$ ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ಈ ದೂರಗಳನ್ನು ಆಯಾ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ A $(3, 0)$ F $(-3, -3)$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ಆರು ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಹೀಗಿವೆ: B$(1, 4)$, C$(0, 5)$, D$(-2, 2)$, E$(-4, 0)$, G$(0, -2)$ ಮತ್ತು H$(5, -5)$.

ನಾವು ಆರಿಸಿದ x ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಈ ಕ್ರಮವನ್ನು ಲಂಬನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಡೇಕಾರ್ಟೆ (Rene Des Cartes, 1637) ಎನ್ನುವ ಫ್ರೆಂಚ್ ಗಣಿತಜ್ಞನು ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿದುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ (Cartesian) ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಎಂದು ಕರೆಯುವುದಿದೆ.

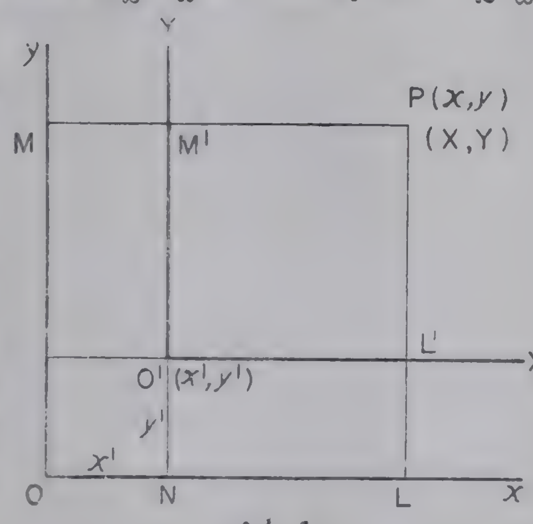
1.2 ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಏಕೈಕತೆ—ಮೇಲೆ ವಿವರಿಸಿದ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ವಿವರ ಹೀಗಿದೆ: ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಇಷ್ಟ ಬಂದಂತಹ ಲಂಬನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುವುದು; ಇಷ್ಟಬಂದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು; ಒಂದು ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳ ದೂರಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುವುದು; ಹೀಗೆ ದೊರೆತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಸಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಆ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳೆಂದು ಕರೆಯುವುದು.

ಅಂದರೆ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ದೊರೆತುವು. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸದಾ ಜೊತೆಯಾಗಿವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ನಿಯೋಜಿತ ಸಂಖ್ಯಾಯುಗ್ಮಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುವುದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿಯೋಜಿತ ಸಂಖ್ಯಾಯುಗ್ಮಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ತಿಳಿ

ದಂತಾಯಿತು. ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆ, ಒಂದು ನಿಯೋಜಿತ ಸಂಖ್ಯಾಯುಗ್ಮಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಅನುರೂಪ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವೇ? P(3, 7), Q(– 2, 4), R(– 4, – 5) ಮತ್ತು S(4, – 3) ಎನ್ನುವ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. P ಬಿಂದುವಿನ x–ನಿರ್ದೇಶಕ + 3, y–ನಿರ್ದೇಶಕ + 7 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ox ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ 3 ಸಮಾನ ದೂರಗಳನ್ನೂ, oy ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ 7 ಸಮಾನ ದೂರಗಳನ್ನೂ ಗಮಿಸಿ P ಯನ್ನು ತಲುಪುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ ox' ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ 2, oy ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ 4 ಸಮಾನ ದೂರಗಳನ್ನು ಗಮಿಸಿ Q ವನ್ನು ತಲುಪುತ್ತೇವೆ; ಇತ್ಯಾದಿ. ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ದತ್ತವಾದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಇಂತಹ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕೈಕವಾಗಿವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ (– 4, – 5) ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಾಗಿರುವ ಬಿಂದುವು R ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ; ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ವಿವರಣೆಯ ಸೌಕರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ಇದುವರೆಗೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸಿ ಹೀಗೆಂದು ಬರೆಯಬಹುದು: "ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೂ ಅನುರೂಪವಾಗಿ ಒಂದು ಜೊತೆ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಾಗಿವೆ; ವಿಲೋಮವಾಗಿ, ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಜೊತೆ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅನುರೂಪವಾಗಿರುವ ಏಕೈಕ ಬಿಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿದೆ."

1.3 ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಸ್ಥಾನಪಲ್ಲಟನ—ಲಂಬನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಅಕ್ಷಗಳ ಸ್ಥಾನ ಮಹತ್ತ್ವದ್ದಾಗಿದೆ ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಸ್ಥಾನ, ಅಂದರೆ ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆ, ಬದಲಾದರೆ ಬಿಂದು ಸ್ಥಿರವಾಗಿ ಇದ್ದರೂ ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಬದಲಾಗುವುವು; ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ದತ್ತ ನಿಯೋಜಿತ ಸಂಖ್ಯಾಯುಗ್ಮವು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಅದೇ ಸಂಖ್ಯಾಯುಗ್ಮ ಸೂಚಿಸುವುದಿಲ್ಲ.



ಚಿತ್ರ 1.2

ಚಿತ್ರ 1.2 ರಲ್ಲಿ Ox, Oy ಒಂದು ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆ. $P(x, y)$ ಒಂದು ಬಿಂದು. O′X, O′Y ವ್ಯವಸ್ಥೆ O′ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ಸಮಾನಾಂತರ

ವ್ಯವಸ್ಥೆ. ಇದರ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ P ಯು (X, Y) ಆಗಿರಲಿ. ಮೊದಲಿನ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಪ್ರಕಾರ O′ ಬಿಂದು (x', y') ಎಂದಿದ್ದರೆ,

$$x = OL = ON + NL = ON + O'L' = x' + X$$

$$y = OM = NO' + O'M' = y' + y$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} x &= x' + X \\ y &= y' + Y \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳ ಸಮಾನಾಂತರ ಸ್ಥಾನಪಲ್ಲಟನದಿಂದ ಬಿಂದು ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಈ ಸೂತ್ರವು ನೀಡುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ

ox, oy ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ P ಯು (−3, 5); O′ ಬಿಂದು (−5, −6); ಹಾಗಾದರೆ O′X, O′Y ಸಮಾನಾಂತರ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ P ಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಏನು?

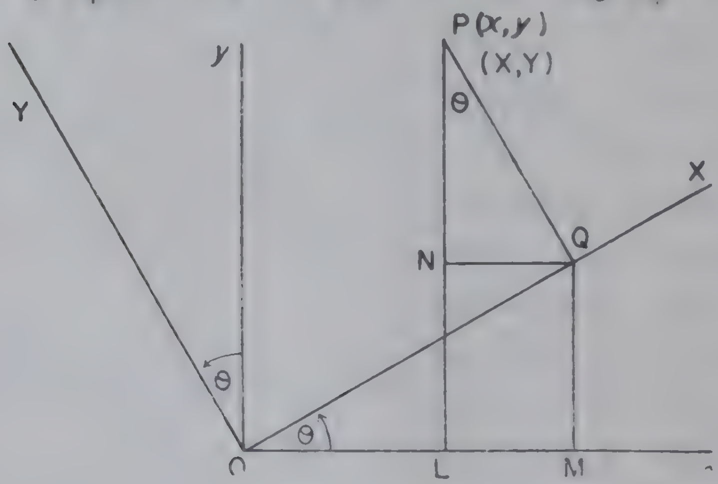
ಇಲ್ಲಿ $x = -3,\ y = 5$

$x' = -5,\ y' = -6$

$$\therefore\ -3 = -5 + X \qquad \therefore\ X = 2$$

$$5 = -6 + Y \qquad \therefore\ Y = 11$$

ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಆವರ್ತನೆಯ ಸ್ಥಾನಾಂತರವನ್ನು ಈಗ ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತೇವೆ. Ox, Oy ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ P (x, y) ಒಂದು ಬಿಂದು. ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಮೂಲ



ಚಿತ್ರ 1.3

ಬಿಂದುವಿನ ಸುತ್ತಲೂ θ ಕೋನದಷ್ಟು ಆವರ್ತಿಸಲಾಗಿದೆ. ನೂತನ ವ್ಯವಸ್ಥೆ OX, OY. ಇದರಲ್ಲಿ P ಯು (X, Y) ಆಗಿದೆ.

$$x = \text{OL} = \text{OM} - \text{LM}$$
$$= \text{OQ} \cos\theta - \text{NQ}$$
$$= \text{X} \cos\theta - \text{Y} \sin\theta$$

$$y = \text{LP} = \text{MQ} + \text{NP}$$
$$= \text{X} \sin\theta + \text{Y} \cos\theta$$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} x &= \text{X}\cos\theta - \text{Y}\sin\theta \\ y &= \text{X}\sin\theta + \text{Y}\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (1.2)$$

ಮತ್ತು,
$$\left.\begin{aligned} \text{X} &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ \text{Y} &= y\cos\theta - x\sin\theta \end{aligned}\right\}$$

ಉದಾಹರಣೆ

Ox, Oy ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ P ಯು (3, 4). $\theta = \frac{\pi}{3}$ ಎಂದಿದ್ದರೆ OX, OY ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ P ಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಏನು?

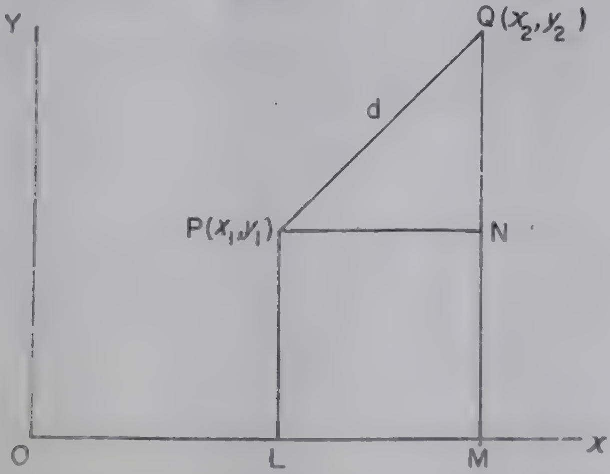
ಇಲ್ಲಿ $x = 3,\ y = 4,\ \theta = \frac{\pi}{3}$

$$\therefore \text{X} = 3\cos\frac{\pi}{3} + 4\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2} + 4\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}[4 + \sqrt{3}]$$

$$\text{Y} = 4\cos\frac{\pi}{3} - 3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{4}{2} - 3\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}[4 - 3\sqrt{3}]$$

1.4 ಎರಡು ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ—

P (x_1, y_1) ಮತ್ತು Q (x_2, y_2) ಎರಡು ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳು. ಚಿತ್ರದಿಂದ,



ಚಿತ್ರ 1.4

$$PN = x_2 - x_1$$
$$NQ = y_2 - y_1$$
$$PQ^2 = PN^2 + NQ^2$$
$$\therefore d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

ಅಥವಾ,

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \quad (1.3)$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ (x, y) ಬಿಂದುವಿನ ದೂರವು $\sqrt{x^2 + y^2}$ ಆಗಿದೆ. (1.3*a*)

ಉದಾಹರಣೆ

$A(1, \frac{7}{8})$, $B(2, \frac{5}{8})$, $C(5, -\frac{1}{8})$ ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$$AB = \sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

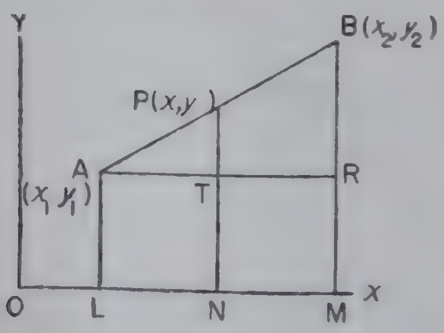
$$BC = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{16 + \frac{64}{9}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{13}{9}} = \frac{4}{3}\sqrt{13}$$

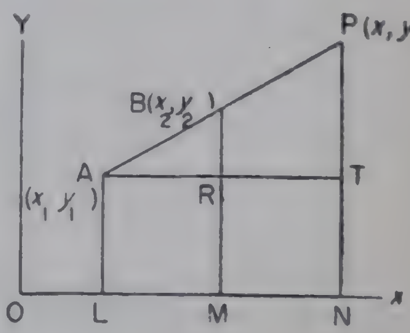
$$\therefore AB + BC = \frac{\sqrt{13}}{3} + \sqrt{13} = \frac{4}{3}\sqrt{13} = AC$$

$\therefore$ A, B, C ಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿವೆ.

1·5 ಜೋಕಿಮ್‌ಸ್ಥಾಲನ ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರಗಳು—ಎರಡು ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು ಒಂದು ದತ್ತ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮ.



(*a*)



(*b*)

ಚಿತ್ರ 1.5

$A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ದತ್ತಬಿಂದುಗಳು.

$P(x, y)$ ಬಿಂದು AB ಯನ್ನು (a) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಳಗೆ ಮತ್ತು (b) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಹೊರಗೆ ಛೇದಿಸುವುದು. ಎರಡರಲ್ಲಿಯೂ $\frac{AP}{PB} = \frac{l}{m}$.

$$\therefore \frac{l}{m} = \frac{AP}{PB} = \frac{AT}{TR} = \frac{TP}{RB}$$

(a) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $\frac{l}{m} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

$$\therefore x = \frac{lx_2 + mx_1}{l + m}, \; y = \frac{ly_2 + my_1}{l + m} \qquad (1.4)$$

(b) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $\frac{l}{m} = \frac{AT}{TR} = \frac{TP}{RB} = \frac{AT}{-RT} = \frac{TP}{RB}$

$$= \frac{x - x_1}{-(x - x_2)} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$\therefore x = \frac{lx_2 + mx_1}{l + m}, \; y = \frac{ly_2 + my_1}{l + m} \qquad (1.4)$$

ಈ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಗಣಿತಜ್ಞ ಜೋಕಿಮ್‌ಸ್ಥಾಲನ (Joachimsthal) ಹೆಸರನ್ನು ಇವುಗಳಿಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ

(1) A(3, 4), B(– 5, – 7) ಜೋಡಣೆಯನ್ನು ಒಳಗೆ ಮತ್ತು ಹೊರಗೆ 3 : 4 ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಏನು?

(i) ಒಳಗೆ—ಇಲ್ಲಿ $\frac{l}{m} = +\frac{3}{4}$

$\therefore$ ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ, $x = \frac{3(-5) + 4(3)}{3 + 4} = -\frac{3}{7}$

$$y = \frac{3(-7) + 4(4)}{3 + 4} = -\frac{5}{7}$$

$\therefore$ ಬೇಕಾದ ಬಿಂದು $\left(-\frac{3}{7}, -\frac{5}{7}\right)$

(ii) ಹೊರಗೆ—ಇಲ್ಲಿ $\frac{l}{m} = -\frac{3}{4} = \frac{-3}{4}$, ಎಂದಿರಲಿ

$\therefore$ ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ, $x = \frac{(-3)(-5)+4(3)}{(-3)+4} = 27$

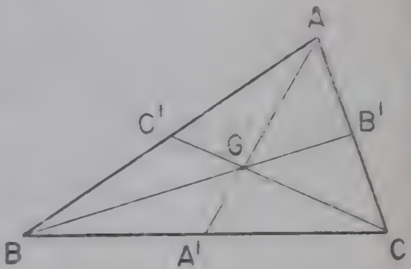
$$y = \frac{(-3)(-7)+4(4)}{(-3)+4} = \frac{37}{1} = 37$$

$\therefore$ ಬೇಕಾದ ಬಿಂದು (27, 37)

(2) $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ ತ್ರಿಕೋನದ ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

A′ ಬಿಂದು BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$.

$\frac{AG}{GA'} = \frac{2}{1}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,



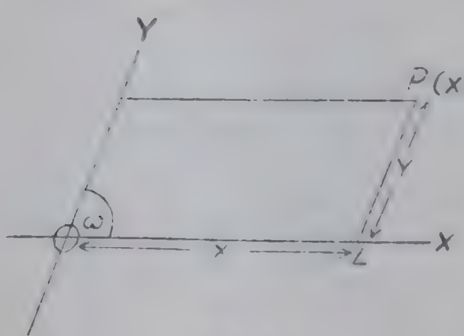
ಚಿತ್ರ 1.6

G ಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು,

$$\left[\frac{2.\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+1.x_1}{2+1}, \frac{2.\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)+1.y_1}{2+1}\right]$$

ಅಥವಾ $G\left[\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right]$ (1.5)

1.6 ಇತರ ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳು—(1) $x'ox$ ಮತ್ತು $y'oy$ ಎನ್ನುವ ಪರಸ್ಪರ ಓರೆಯಾಗಿರುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಂಡು ಒಂದು ಹೊಸ ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ರೂಪಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿಯೂ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಇರುವ ದೂರಗಳೇ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು. ಅಕ್ಷಗಳ ನಡುವಿನ ಸ್ಥಿರಕೋನವನ್ನು ω ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ $P(x_1, y_1)$, $Q(x_1, y_2)$ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ d ಯನ್ನು

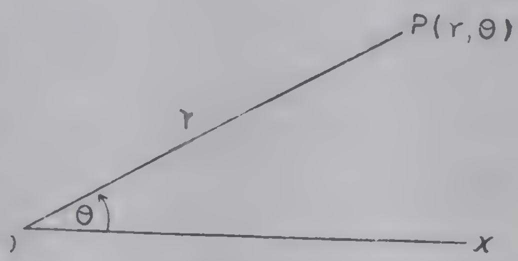


ಚಿತ್ರ 1.7

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\omega \qquad (1.6)$$

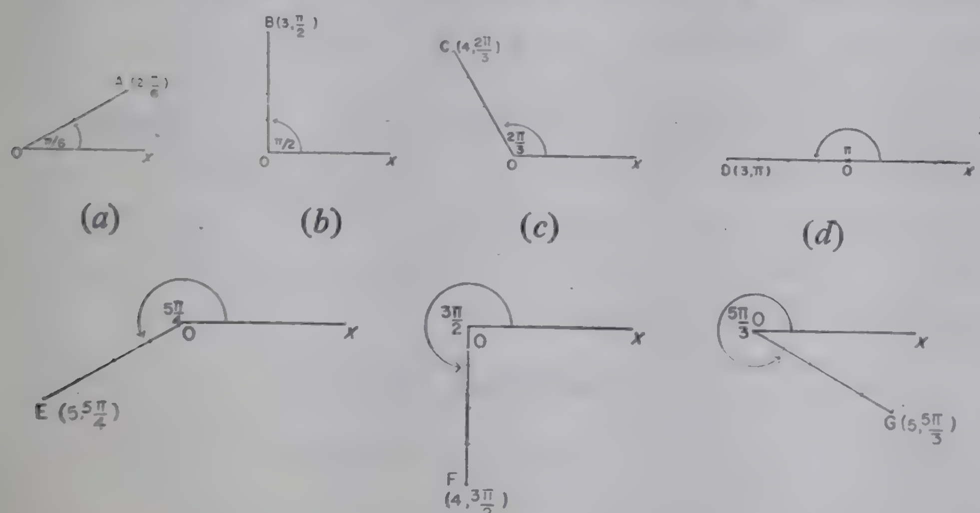
ಸೂತ್ರವು ನೀಡುವುದು. ಜೋಕಿಮ್‌ಸ್ಥಾಲನ ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರಗಳು ಇಲ್ಲಿಯೂ ಸೂತ್ರ (1.4) ರಂತೆ ಇವೆ.

(2) ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಹೆಸರು ಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆ (Polar system of coordinates). ಸೌಕರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ಅಡ್ಡರೇಖೆಯನ್ನು ಮೂಲರೇಖೆಯಾಗಿ ಆರಿಸಿಕೊಂಡು ಇದರ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಬಿಂದುವನ್ನು ಧ್ರುವ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮೂಲರೇಖೆ Ox ಮತ್ತು ಧ್ರುವ O ಬಿಂದು. P ಯು ಕಾಗದದ ಸಮತಲದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು. xOP ಕೋನವನ್ನು ಧನಾತ್ಮಕ (ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣ) ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಅಳತೆ ಮಾಡಿ ಎದುರಿಗೆ OP ದೂರವನ್ನು ನಮಿಸಿ P ಯನ್ನು ತಲುಪುತ್ತೇವೆ. ಇವುಗಳ ಬೆಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ θ ಮತ್ತು r ಎಂದಿದ್ದರೆ



ಚಿತ್ರ 1.8

P ಯನ್ನು (r, θ) ಎಂದು ನಿರ್ದೇಶಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ θ ಕೋನವನ್ನು ಧನಾತ್ಮಕ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಅಳತೆ ಮಾಡಿದ ಮೇಲೆ ಎದುರಾಗುವ ದಿಕ್ಕು r ನ ಧನಾತ್ಮಕ ದಿಶೆ ಎಂದೂ, ಅದರ ವಿರೋಧ ದಿಕ್ಕು r ನ ಋಣಾತ್ಮಕ ದಿಶೆ ಎಂದೂ ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ. ಚಿತ್ರ 1.9 ರಲ್ಲಿ $A(2, \frac{\pi}{6})$, $B(3, \frac{\pi}{2})$, $C(4, \frac{2\pi}{3})$, $D(3, \pi)$, $E(5, \frac{5\pi}{4})$, $F(4, \frac{3\pi}{2})$ ಮತ್ತು $G(5, \frac{5\pi}{3})$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 1.9

ಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಬಿಂದು ಏಕೈಕವಾಗಿದ್ದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ಯುಗ್ಮ ಏಕೈಕವಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ A ಯ ಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು $(2, 2n\pi + \frac{\pi}{8})$ ಅಥವಾ (ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಸ್ತರಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ) $(-2, -\frac{5\pi}{8})$ ಅಥವಾ $(-2, \frac{7\pi}{8})$ ಅಥವಾ $(2, -\frac{15\pi}{8})$ ಎಂದು ಮುಂತಾಗಿಯೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

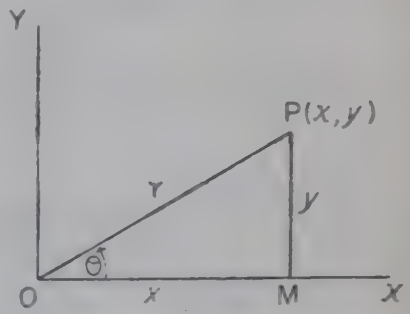
1.7 ಲಂಬ ಮತ್ತು ಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧ— P ಬಿಂದುವಿನ ಲಂಬ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (x, y) ಮತ್ತು ಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (r, θ) ಎಂದಿರಲಿ.

ಆಗ, $x = \text{OM} = r\cos\theta$

$y = \text{MP} = r\sin\theta$

$\therefore$ r, θ ಗಳು ದತ್ತವಾದಾಗ, x, y ಗಳನ್ನು

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad (1.6)$$



ಚಿತ್ರ 1.10

ಸೂತ್ರವೂ; x, y ಗಳು ದತ್ತವಾದಾಗ, r, θ ಗಳನ್ನು

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ \tan\theta &= \frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \quad (1.7)$$

ಸೂತ್ರವೂ ನೀಡುವುವು.

(1.7) ರಲ್ಲಿ $r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\theta = n\pi + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

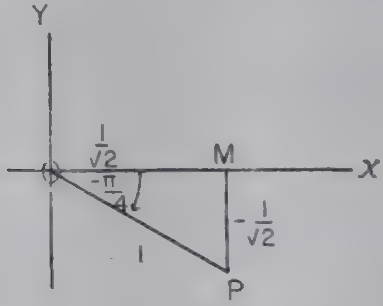
ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಏಕೈಕವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ತೊಡಕನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು r ಮತ್ತು θ ಗಳಿಗೆ ಕೆಲವು ನಿರ್ಬಂಧಗಳನ್ನು ವಿಧಿಸುತ್ತೇವೆ:— (1) r ನ ಧನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಆರಿಸುತ್ತೇವೆ. (2) $-\pi < \theta < \pi$ ಆಗಿರುವಂತೆ θ ವನ್ನು ಆರಿಸುತ್ತೇವೆ. θ ಕೋನದ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಅದರ ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆ ಎಂದು ಕರೆಯುವುದಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ

$\text{P}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ಬಿಂದುವನ್ನು ಧ್ರುವೀಯಮಾನದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸುವ ಕ್ರಮ. ಈ ಬಿಂದು ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪಾದದಲ್ಲಿದೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಅದರ ಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (r, θ) ಎಂದಿರಲಿ.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = r\cos\theta,\ -\frac{1}{\sqrt{2}} = r\sin\theta$$

$\therefore\ r^2 = 1,\ r = \pm 1;\ r = +1$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.



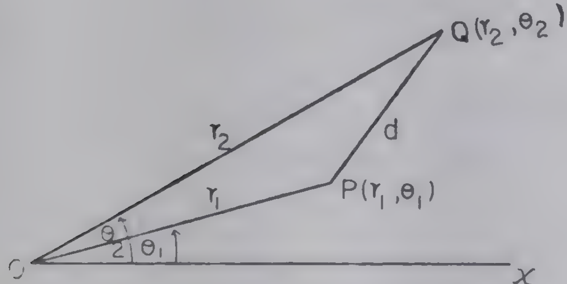
ಚಿತ್ರ 1.11

$$\therefore\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ಇವೆರಡನ್ನೂ ತಾಳೆ ನೋಡುವ θದ ವಿವಿಧ ಬೆಲೆಗಳು $-9\frac{\pi}{4},\ -\frac{\pi}{4},\ \frac{9\pi}{4}$, ಇತ್ಯಾದಿ ಆಗಿವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ θದ ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆ $(-\pi < \theta < \pi) - \frac{\pi}{4}$ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ P ಬಿಂದುವಿನ ಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $(1, -\frac{\pi}{4})$ ಆಗಿವೆ.

1.8 ಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ—

$P(r_1,\ \theta_1)$, $Q(r_2, \theta_2)$ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು. ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ d ಎಂದಿದ್ದರೆ, $d^2 = PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2.OP.OQ.\ \cos\angle POQ$



ಚಿತ್ರ 1.12

$$\therefore\ d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1) \qquad (1.8)$$

1.9 ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ—ಚಿತ್ರ 1·12 ರಲ್ಲಿ

$$\triangle OPQ = \tfrac{1}{2} OP . OQ . \sin(\theta_2 - \theta_1)$$
$$= \tfrac{1}{2} r_1 r_2 (\sin\theta_2 \cos\theta_1 - \cos\theta_2 \sin\theta_1)$$
$$= \tfrac{1}{2} [r_1 \cos\theta_1 \, r_2 \sin\theta_2 - r_1 \sin\theta_1 \, r_2 \cos\theta_2]$$
$$= \tfrac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1),$$ (ಸೂತ್ರ 1·6 ರ ಪ್ರಕಾರ; ಇಲ್ಲಿ x_1, y_1 ಗಳು P ಯ ಲಂಬನಿರ್ದೇಶಕಗಳು.)

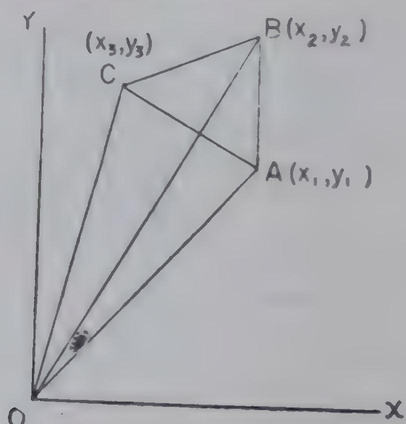
$$\therefore \triangle OPQ = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) \qquad (1.9)$$

ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರ 1·12 ರಲ್ಲಿ P, Q ಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದರೆ,

$$\triangle OQP = \tfrac{1}{2}(x_2 y_1 - x_1 y_2)$$
$$= -\tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$
$$= -\tfrac{1}{2} \triangle OPQ$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಕ್ಕೆ ಚಿಹ್ನೆಯೂ ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗಾಗಿ, ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಗಣನೆ ಮಾಡುವಾಗ ಒಂದು ಸಂಪ್ರದಾಯವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತೇವೆ. "ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದಲ್ಲಿ ಅದರ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಬರೆದಿರುವ ಕ್ರಮ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ." ಚಿತ್ರ 1·12 ರಲ್ಲಿ OPQ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ, OQP ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಭುಜಗಳ ಮೇಲೆ ಒಬ್ಬನು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆಯಾಗಿ ನಡೆಯುತ್ತಿದ್ದರೆ ತ್ರಿಭುಜ ಅವನ ಎಡಬದಿಗಿರುವುದು; ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವುದು.

$\triangle ABC$ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿರಲಿ. ಅದರ ಶೃಂಗಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ಆಗಿರಲಿ. ಚಿತ್ರ 1·13 ರಲ್ಲಿ,



ಚಿತ್ರ 1·13

$$\triangle ABC = \triangle OAB + \triangle OBC - \triangle OAC$$

$$= \tfrac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) + \tfrac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2) - \tfrac{1}{2}(x_1y_3 - x_3y_1)$$

$$= \tfrac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \qquad (1.10)$$

$$= \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (1.10)$$

A, B, C ಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿದ್ದರೆ $\triangle ABC = 0$

$$\therefore \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.10\,a)$$

ಅಭ್ಯಾಸ 1·1

1 G ಯು $\triangle ABC$ ಯ ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರ. P ಅದರ ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ—

(*a*) $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

(*b*) $PA^2 + PB^2 + PC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3\,GP^2$

(*c*) ಭುಜಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತದ ಮೂರರಷ್ಟು ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತದ ನಾಲ್ಕರಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.

2 ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ (4, 9), (1, 5), (4, 1), (7, 5) ಆಗಿವೆ. ಅದರ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3 (2, 1), (5, 4), (1, 4) ಇವು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಮೂರು ಮೂಲೆಗಳು. (2, 1) ಮೂಲೆಯ ಎದುರು ಇರುವ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಮೂಲೆಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳೆಷ್ಟು?

4 (4, 5), (3, − 1), (2, − 6) ಶೃಂಗಗಳಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಪರಿತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನೂ ಪರಿಕೇಂದ್ರವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5 (1, 4), (9, − 2), (5, 1) ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6 (– 3, 11), (5, 9), (8, 0), (6, 8) ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿವೆಯೆಂದೂ ಅವುಗಳ ಪರಿವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವು (– 1, 2) ಎಂದೂ ಸಾಧಿಸಿ.

7 A (1, 2), B (8, 4), C (3, 9) ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $\triangle$s PCB, PCA, PAB ಇವುಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಚಿಹ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾನವಾಗಿರುವಂತೆ P ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಇದರ ಜಾಮಿತೀಯ ಅರ್ಥವೇನು?

8 K_1, K_2, K_3 ಯಾವುದೂ $\neq 0$. ಆದರೆ $K_1 + K_2 + K_3 = 0$ ಮತ್ತು

$$K_1x_1 + K_2x_2 + K_3x_3 = 0,$$
$$K_1y_1 + K_2y_2 + K_3y_3 = 0$$

ಹಾಗಾದರೆ, (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಎರಡನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯ

ಸರಳರೇಖೆ

2.1 ಪಥ, ಪಥ ಸಮೀಕರಣ—ಒಂದು ದತ್ತ ನಿಯಮಾನುಸಾರ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವು ರೇಖಿಸುವ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಬಿಂದುಪಥ ಅಥವಾ ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ಪಥ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ, ಪಥದ ಮೇಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ ದತ್ತನಿಯಮವನ್ನು ಪಾಲಿಸಬೇಕು, ಎಂದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವುದು.

ಎರಡು ಸುಲಭ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

P ಚರಬಿಂದುವು A ಸ್ಥಿರಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸದಾ ನಿಯತ ದೂರದಲ್ಲಿರುವುದಾದರೆ, ಅದು (P) A ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ನಿಯತ ದೂರ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯ ಮೇಲೆ ಇರುವುದು. ಇದನ್ನೇ, P ಯ ಪಥವು A ಯು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ದತ್ತ ನಿಯತ ದೂರ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಎರಡು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ ಆ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳ ಸಮಭಾಜಕಗಳು.

ಇಂತಹ ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. ಅದರ ಮುಖ್ಯ ಹಂತಗಳು ಹೀಗಿವೆ.

I ಚರಬಿಂದುವಿನ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸ್ಥಾನವನ್ನು P (x_1, y_1) ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

II ದತ್ತ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಚರಬಿಂದುವಿನ ಈ ನಿರ್ದಿಷ್ಟಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸಿ x_1, y_1 ಗಳಿಗೂ ದತ್ತ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳಿಗೂ ಬೈಜಿಕ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದರ ರೂಪ $f(x_1, y_1) = 0$ ಎಂದಿರುವುದು.

III ಚರಬಿಂದುವಿನ ಯಾವುದೇ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೂ ಅನುರೂಪ ಬೈಜಿಕ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು ಎಂದು ತರ್ಕಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, ಚರಬಿಂದು Q (x_2, y_2), R (x_3, y_3) ಮುಂತಾದ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿರುವಾಗ ಅನುರೂಪ ಸಂಬಂಧಗಳು $f(x_2, y_2) = 0$, $f(x_3, y_3) = 0$ ಎಂದೇ ಇರುವುವು.

IV ಈ ವಿವಿಧ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅದು $f(x, y) = 0$. ಇದು x, y ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣ. ಇದರಲ್ಲಿ x, y ಗಳಿಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 ಮುಂತಾದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ ಈ ಸಮೀಕರಣ ತಾಳೆಯಾಗುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಚರ

ಬಿಂದುವಿನ ವಿವಿಧ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಈ ಸಮೀಕರಣವು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಇಂತಹ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಥ ಸಮೀಕರಣವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ

ಒಂದು ಚರಬಿಂದುವಿನಿಂದ A (2, 3) ಮತ್ತು B (− 2, − 3) ಎನ್ನುವ ಎರಡು ಸ್ಥಿರಬಿಂದುಗಳ ದೂರಗಳ ಮೊತ್ತವು 7 ಆದರೆ ಆ ಚರಬಿಂದುವಿನ ಪಥಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

I P (x_1, y_1) ಆ ಚರ ಬಿಂದುವಿನ ಒಂದು ಸ್ಥಾನವಾಗಿರಲಿ.

II PA + PB = 7 (ದತ್ತ)

$$\therefore \sqrt{(x_1-2)^2+(y_1-3)^2}+\sqrt{(x_1+2)^2+(y_1+3)^2}=7 \quad (a)$$

III ಚರಬಿಂದು Q (x_2, y_2), R (x_3, y_3) ಮುಂತಾದ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿರುವಾಗ ಅನುರೂಪ ಸಂಬಂಧಗಳು ಹೀಗಿವೆ:

$$\sqrt{(x_2-2)^2+(y_2-3)^2}+\sqrt{(x_2+2)^2+(y_2+3)^2}=7 \quad (b)$$

$$\sqrt{(x_3-2)^2+(y_3-3)^2}+\sqrt{(x_3+2)^2+(y_3+3)^2}=7 \quad (c)$$

IV $\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y+3)^2}=7 \quad (d)$

ಎನ್ನುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಇದರಲ್ಲಿ x, y ಗಳಿಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ, x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ [(a), (b), (c) ಗಳಿಂದ] ಇದು ತಾಳೆಯಾಗುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಚರಬಿಂದುವಿನ (x_1, y_1) ಮುಂತಾದ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು (d) ಸಮೀಕರಣವು ಸೂಚಿಸುವುದು.

$$\therefore \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y+3)^2}=7$$

ಇದೇ ಚರಬಿಂದುವಿನ ಪಥ ಸಮೀಕರಣ ಎಂದು ಪರಿಸಮಾಪ್ತಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಪಥ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅತ್ಯಂತ ಸುಲಭರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕು. ಘಾತ ಮೂಲಗಳು ಇತ್ಯಾದಿ ಅದರಲ್ಲಿರಬಾರದು. ಮೇಲಿನ ಪಥ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿ

$176x^2 - 192\,xy + 72y^2 + 147 = 0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

2.2 ಮೇಲಿನ ವಾದದಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳು ವ್ಯಕ್ತವಾಗುವುವು.

1 ಪಥ ಸಮೀಕರಣವು x ಮತ್ತು y ಗಳಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸಂಬಂಧ. ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಆ ಪಥದ ಮೇಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳೂ ತಾಳೆ ಮಾಡುವುವು; ಇಷ್ಟುಮಾತ್ರವಲ್ಲ, ಪಥದ ಮೇಲೆ ಇರದ ಯಾವ ಬಿಂದುವೂ ತಾಳೆ ಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ.

2 ಪಥ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಚರಗಳಿವೆ, x ಮತ್ತು y. ಸಮೀಕರಣದ ರೂಪವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರವಾಗಿ ಆರಿಸಿ ಕೊಂಡು ಅದಕ್ಕೆ ನಮಗಿಷ್ಟಬಂದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಬಹುದು; ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಚರದ ಅನುರೂಪ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಹೀಗೆ ದೊರೆಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪಥದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ನಿಯೋಜಿತ ಸಂಖ್ಯಾ ಯುಗ್ಮಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ ಪಥ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಪಥವನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸಬಹುದು.

ಹೀಗೆ ಪಥವು ದತ್ತವಾದಾಗ ಸಮೀಕರಣವು ಅದರ ಬೈಜಿಕ ರೂಪ; ಸಮೀಕರಣವು ದತ್ತವಾದಾಗ ಪಥವು ಅದರ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷರೂಪ. ಒಂದರ ಪ್ರತಿಬಿಂಬ ಇನ್ನೊಂದು. ಒಂದರಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಪೂರಕಗೊಂಡು ಸಮಗ್ರ ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ ಜ್ಞಾನವಿಕಾಸವಾಗುವುದು.

2.3 ಸರಳರೇಖೆ—ಎರಡು ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ವಿಶಿಷ್ಟ ಸಮತಲ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಉದ್ದದ ರೇಖೆ ಸರಳರೇಖೆ. ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು A (a, b), B (c, d) ಎನ್ನುವ ಎರಡು ಸ್ಥಿರಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. AB ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಚರ ಬಿಂದುವಿನ ಒಂದು ಸ್ಥಾನ P (x_1, y_1) ಎಂದಿರಲಿ. P ಎಲ್ಲಿಯೇ ಇದ್ದರೂ,

$$\triangle PAB = 0.$$

$$\therefore \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & a & c \\ y_1 & b & d \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore$ ಆ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $\begin{vmatrix} x & a & c \\ y & b & d \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (2.1)

ಇದನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಪುನರ್ವ್ಯವಸ್ಥಿಸಿದಾಗ,

$(b - d)\,x - (c - a)\,y + (ad - bc) = 0$ ಎಂದಾಗುವುದು. $x = a$, $y = b$; $x = c$, $y = d$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ಈ ಸಮೀಕರಣವು ತಾಳೆ ಯಾಗುವುದೆಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

2.4 ಸಮೀಕರಣದ ರೂಪ—ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು x, y ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನೆಯ ಘಾತದ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ. ಇಂತಹ ಸಮೀಕರಣದ

ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪ $Ax + By + C = 0$. ಇಲ್ಲಿ A, B, C ಗಳು ಸ್ಥಿರಗುಣಕಗಳು. ಈ ಸಮೀಕರಣವು ರೂಪಿಸುವ ಪಥ ಯಾವುದು ಎಂದು ಈಗ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $R(x_3, y_3)$ ಬಿಂದುಗಳು ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಪಥದ ಮೇಲಿರಲಿ. ಆಗ,

$$Ax_1 + By_1 + C = 0$$
$$Ax_2 + By_2 + C = 0$$
$$Ax_3 + By_3 + C = 0$$

A, B, C ಗಳನ್ನು ಇವುಗಳಿಂದ ವಿಸರ್ಜಿಸಲಾಗಿ,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ಸೂತ್ರ (1.10a) ಯಿಂದ $\triangle$ PQR = 0 ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

$\therefore$ P, Q, R ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, x, y ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನೆಯ ಘಾತದ ಎಲ್ಲಾ ಸಮೀಕರಣಗಳೂ ಒಂದೊಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವವು.

$\therefore Ax + By + C = 0$ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ, C ಯಿಂದ $(C \neq 0)$ ಇದನ್ನು ಭಾಗಿಸಲಾಗಿ,

$$\frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y + 1 = 0$$

$\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ ಗಳೂ ಸ್ಥಿರಗುಣಕಗಳಾದುದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ l ಮತ್ತು m ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\therefore \quad lx + my + 1 = 0$$

ಹೀಗೆ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸ್ವತಂತ್ರ ಸ್ಥಿರ ಗುಣಕಗಳಿವೆ. ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎರಡು ಸ್ವತಂತ್ರ ನಿಯಮಗಳು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದೇ ಇದರ ಕಾರಣ.

2.5 ಸರಳರೇಖೆಯ ಸುಲಭರೂಪಗಳು—ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ಪಥ ಮತ್ತು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರ್ಯಾಯಪದಗಳಾಗಿ ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ದತ್ತ ನಿಯಮಾನುಸಾರ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ವಿವಿಧ ರೂಪಗಳು

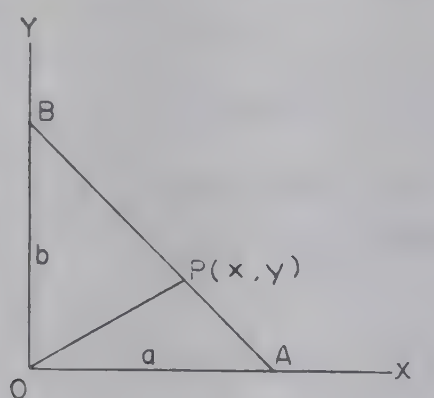
ಬರುವುವು. ಇವುಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯುವ ಮೊದಲು ಕೆಲವು ಉಪಯುಕ್ತ ಪದಗಳನ್ನು ಅರಿತುಕೊಳ್ಳುವುದು ಉತ್ತಮ.

(a) ರೇಖಾಂತರ (intercept) — ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು Ox, Oy ಗಳನ್ನು A ಮತ್ತು B ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. OA ಯನ್ನು (ಸರಳರೇಖೆಯ) x–ರೇಖಾಂತರವೆಂದೂ, OB ಯನ್ನು y–ರೇಖಾಂತರವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ರೇಖಾಂತರಗಳು ಆಯಾ ಅಕ್ಷಗಳ ಧನ, ಋಣ ದಿಶೆಗಳನ್ನನುಸರಿಸಿ ಧನ, ಋಣ ಆಗಿರುವುವು.

(b) ಬಾಗು (inclination) — AB ಸರಳರೇಖೆಯು Ox ನ್ನು A ಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಧನ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ xAB ಕೋನದ ಬೆಲೆಯನ್ನು AB ಯ ಬಾಗು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಬಾಗುವಿನ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ 0 ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ π ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

(c) ಓಟ (slope or gradient) — ಬಾಗುವಿನ ಟೇಂಜೆಂಟ್‌ನ್ನು (tan xAB) AB ಯ ಓಟ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಬಾಗು 0 ಯಿಂದ $\frac{\pi}{2}$ ಗೆ ಏರಿದಂತೆ ಓಟ 0 ಯಿಂದ ಧನ ಅನಂತಕ್ಕೆ ಏರುವುದು; ಬಾಗು $\frac{\pi}{2}$ ರಿಂದ π ಗೆ ಏರಿದಂತೆ ಓಟ ಋಣ ಅನಂತದಿಂದ ತೊಡಗಿ 0 ಗೆ ಏರುವುದು.

I "ರೇಖಾಂತರರೂಪ" — AB ಯು ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲೆ OA $(=a)$, OB $(=b)$ ರೇಖಾಂತರಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಿ. P(x, y) AB ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. A ಯು $(a, 0)$, B ಯು $(0, b)$ ಆಗಿವೆ.



ಚಿತ್ರ 2.1

$$\triangle OAB = \triangle OAP + \triangle OPB$$

$$\therefore \tfrac{1}{2}ab = \tfrac{1}{2}ay + \tfrac{1}{2}xb$$

$$\therefore \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (2.2)$$

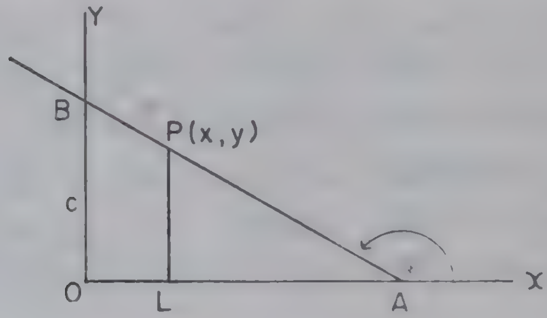
ಈ ರೂಪವನ್ನು $\dfrac{x}{x\text{–ರೇಖಾಂತರ}} + \dfrac{y}{y\text{–ರೇಖಾಂತರ}} = 1$ ಎಂದು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡುತ್ತೇವೆ. ಈ ರೇಖಾಂತರಗಳು ಋಣದಿಶೆಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಸೂಕ್ತ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಆಯಾ ರೇಖಾಂತರಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಸಬೇಕು.

II "ಓಟದ ರೂಪಗಳು" — AB ಯ ಓಟವು m ಎಂದಿರಲಿ.

(i) AB ಯ y–ರೇಖಾಂತರ c ಎಂದಿರಲಿ. $P(x, y)$ AB ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು.

$$\frac{BO}{OA} = \frac{PL}{LA} = \tan(180° - \psi) = -m$$

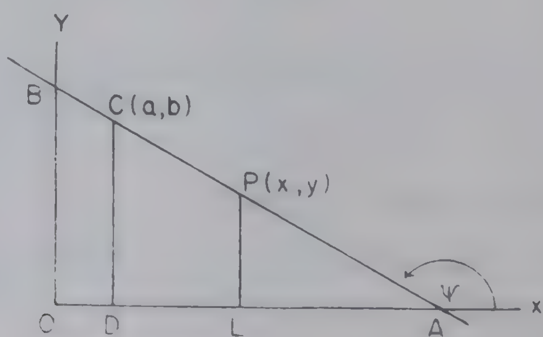
$$\therefore \frac{c}{OL + LA} = \frac{y}{LA} = \frac{c - y}{OL} = -m$$



ಚಿತ್ರ 2.2

$$\therefore \frac{c - y}{x} = -m \text{ ಅಥವಾ } y = mx + c \qquad (2.3)$$

(ii) $C(a, b)$ ಯು AB ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. $P(x, y)$ AB ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು.



ಚಿತ್ರ 2.3

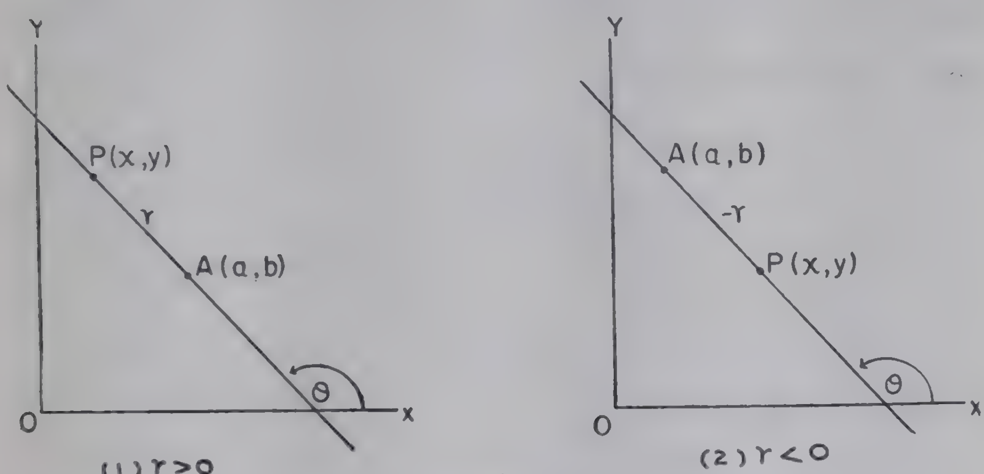
$$\frac{CD}{DA} = \frac{PL}{LA} = \tan(180 - \psi) = -m$$

$$\frac{b}{DA} = \frac{y}{LA} = \frac{b-y}{DL} = -m$$

$\therefore \frac{b-y}{x-a} = -m$ ಅಥವಾ $y - b = m(x-a)$ (2.4)

III "ದೂರ ಸಮೀಕರಣ" — A (a, b) ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದು; θ ಅದರ ಬಾಗು. ಆಗ ಅದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $\frac{x-a}{\cos\theta} = \frac{y-b}{\sin\theta} = r$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. (2.5.)

ಇಲ್ಲಿ r, ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದು (a, b) ಯಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು (x, y) ಯ ಬೈಜಿಕ ದೂರ. P (x, y) ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಚಿತ್ರ (1) ರಲ್ಲಿ $r > 0$ ಆಗಿಯೂ (2) ರಲ್ಲಿ $r < 0$ ಆಗಿಯೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 2.4

(1) ರಲ್ಲಿ $\frac{a-x}{r} = \cos(180° - \theta) = -\cos\theta$

ಮತ್ತು $\frac{y-b}{r} = \sin(180° - \theta) = \sin\theta$

$$(2) \text{ ರಲ್ಲಿ } \frac{x-a}{-r} = \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$$

$$\text{ಮತ್ತು } \frac{b-y}{-r} = \sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$$

$$\therefore \text{ ಎರಡು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ } \frac{x-a}{\cos\theta} = \frac{y-b}{\sin\theta} = r \qquad (2.5)$$

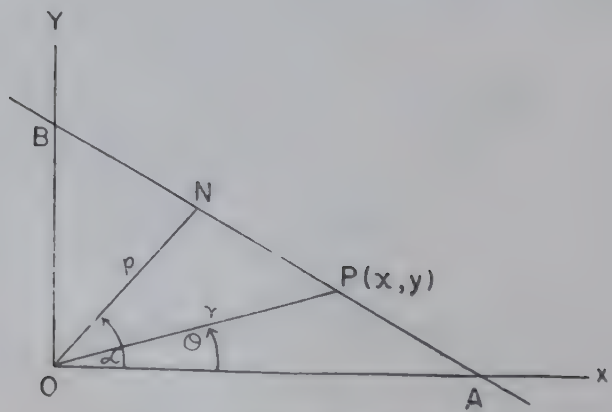
ಇಲ್ಲಿ $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta + a, \\ y = r\sin\theta + b \end{array}\right\}$ ಇವೆರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗುವುವು. r ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾದಂತೆ (x, y) ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುವುವು. ಇಂಥ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪ್ರಾಚಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದೂ, r ನ್ನು ಪ್ರಾಚಲ (parameter) ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

IV "p-α ಅಥವಾ ಲಂಬ–ಕೋನ ರೂಪ"—ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆ AB ಗೆ ON ನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. $\angle xON = \alpha$, $ON = p$ ಎರಡೂ ದತ್ತವಾಗಿವೆ. ಹೀಗೆ p, α ಗಳು ದತ್ತವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯು ಏಕೈಕ ವಾಗಿದೆ. P (x, y) ಈ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು. ಆಗ,

$$OP\cos(\alpha - \theta) = p$$

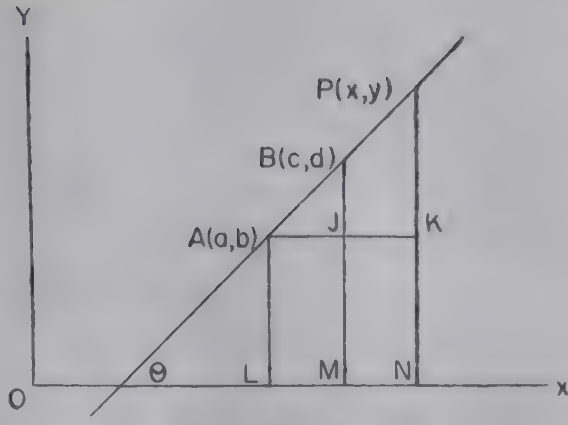
$$\therefore\ r\cos\theta\cos\alpha + r\sin\theta\sin\alpha = p$$

$$\therefore\ x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \qquad (2.6)$$



ಚಿತ್ರ 2.5

V ಎರಡು ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೂಪ— A (a, b), B (c, d) ಎರಡು ದತ್ತಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. P (x, y) AB ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಚಿತ್ರ 2.6 ರಿಂದ



ಚಿತ್ರ 2.6

$$\frac{AK}{AJ}=\frac{PK}{BJ}$$

$$\frac{x-a}{c-a}=\frac{y-b}{d-b}$$

ಅಥವಾ $$\frac{x-a}{a-c}=\frac{y-b}{b-d} \qquad (2.7)$$

ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿ ಸೂತ್ರ (2.1) ರ ರೂಪಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಬಹುದು.

2.6 ಸರಳರೇಖೆಯ ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ಗುಣಗಳು—(1) ಸರಳರೇಖೆಯ ರೂಪ ಹೇಗೆಯೇ ಇದ್ದರೂ ಅದನ್ನು $y=mx+c$ ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿ m ಅದರ ಓಟ, c y–ರೇಖಾಂತರ. ರೂಢಿಯಲ್ಲಿ m ಸಂಕೇತವನ್ನು ಓಟವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಬಳಸುವುದಿದೆ. ಸರಳರೇಖೆಯ ಚಿತ್ರಣ ಈ ಕ್ರಮದಿಂದ ಸುಲಭವಾಗುವುದು.

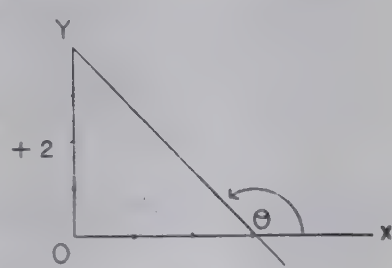
ಉದಾಹರಣೆ

$$4x+3y-6=0$$

$$y=-\frac{4}{3}x+\frac{6}{3}=-\frac{4}{3}x+2$$

$$\tan\theta=-\frac{4}{3}$$

$$c=2$$



ಚಿತ್ರ 2.7

(2) ಎರಡು ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳ ಜೋಡಣೆಯು m.

ಆ ಬಿಂದುಗಳು A (a, b), B (c, d) ಆಗಿರಲಿ. (ಚಿತ್ರ 2.6)

$$m=\tan\theta=\frac{BJ}{JA}=\frac{d-b}{c-a}=\frac{y\text{–ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯತ್ಯಾಸ}}{x\text{–ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯತ್ಯಾಸ}}$$

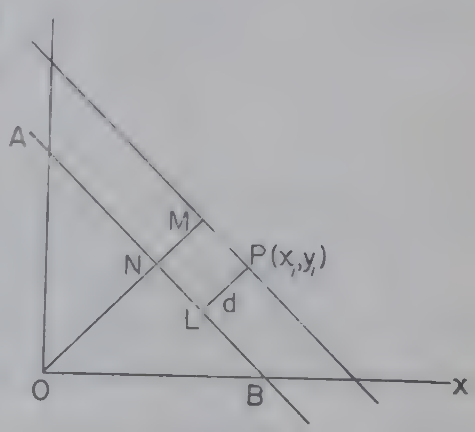
(3) Ox ನ ಸಮೀಕರಣ $y=0$; Oy ಯ ಸಮೀಕರಣ $x=0$.

(4) Ox ಗೆ a ದೂರದಲ್ಲಿ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯು $y=a$; Oy ಗೆ b ದೂರದಲ್ಲಿ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯು $x=b$.

(5) ಮೂಲಬಿಂದು (0, 0). ಇದರ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

$Ax+By+C=0$ ಇದು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗಿದರೆ, $A.0+B.0+C=0$, ಅಥವಾ $C=0$.

2.7 ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ದೂರ—AB ಯು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆ $ax+by+c=0$. $P(x_1, y_1)$ ದತ್ತಬಿಂದು. PL ನ್ನು ABಗೆ ಲಂಬವಾಗಿಯೂ PM ನ್ನು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿಯೂ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ONM ನ್ನು AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 2.8

$d = PL$

PM ನ ಸಮೀಕರಣವು

$$y-y_1=-\frac{a}{b}(x-x_1)$$

$$ax+by=(ax_1+by_1)$$

ಇದನ್ನು $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ ರೂಪಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದರೆ,

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\sin\alpha}{b}=\frac{p}{ax_1+by_1}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\therefore\ p=\frac{ax_1+by_1}{\sqrt{a^2+b^2}}=OM$$

ಇದೇ ರೀತಿ AB ಯ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ, $ON=\dfrac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ದೊರೆಯುವುದು.

$$\therefore\ d=PL=MO-NO=-\left(\frac{ax_1+by_1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)-\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=-\left(\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\qquad(2.8)$$

ರೂಢಿಯಲ್ಲಿ d ಯ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

2.8 ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಯ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳು—

$$\left.\begin{array}{l} y = m_1x + c_1 \\ y = m_2x + c_2 \end{array}\right\}$$ ಎರಡು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಅವುಗಳ ಬಾಗುಗಳು θ_1, θ_2 ಆಗಿದ್ದರೆ,

$$\tan \theta_1 = m_1$$
$$\tan \theta_2 = m_2$$

ಆ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ ϕ ಎಂದರೆ,

$$\phi = \theta_1 \sim \theta_2$$

$$\therefore \tan \phi = \tan(\theta_1 \sim \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 \sim \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2}$$

$$= \frac{m_1 \sim m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$\therefore \phi = \pm \tan^{-1}\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right) \qquad (2\cdot 9)$$

$(1 + m_1m_2 \neq 0)$

$1 + m_1m_2 = 0$ ಆದಾಗ ಈ ಸೂತ್ರ ವಿಫಲವಾಗುವುದು. ಇಲ್ಲಿ $1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2 = 0$

$$\therefore \tan \theta_1 = -\cot \theta_2 = \tan\left(\tfrac{\pi}{2} + \theta_2\right)$$

$$\therefore \quad \theta_1 = \theta_2 + \tfrac{\pi}{2}$$

$\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ (ಅಥವಾ $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2}$)

ಇಲ್ಲಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವುವು. ಆದುದರಿಂದ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಓಟವು ಇನ್ನೊಂದರ ಓಟದ ವ್ಯತಿರಿಕ್ತ ಚಿಹ್ನೆಯ ವಿಲೋಮಕ್ಕೆ ಸಮಾನ.

2.9 ಒಂದು ಜೊತೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು—ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳು,

$$\left.\begin{array}{l} AB \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ AC \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array}\right\}$$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಅವು A ಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುವು. AD, AE ಗಳು $\angle BAC$ ಯ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು. P (x_1, y_1) ಇವುಗಳ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು. PL, PM ನ್ನು AB, AC ಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆದರೆ PL $= \pm$ PM

$$\therefore \frac{a_1x_1 + b_1y_1 + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x_1 + b_2y_1 + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

$\therefore$ AD, AE ಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು,

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \quad (2.10)$$

2.10 ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ—ಎರಡು ಪಥಗಳು ಛೇದಿಸುವ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳೂ ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಪಥ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಎರಡನ್ನೂ ತಾಳಿ ಮಾಡಬೇಕು. ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಥವಾ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗಣಿಸಬಹುದು.

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$ ಇವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮ. ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\ x &= \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ y &= \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{aligned}\right\}$$ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು. $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ಆದಾಗ ಇವು ಸಮಾನಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳಾಗುವುವು.

2.11 ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ—

$$\left.\begin{aligned} S &\equiv f(x, y) = 0 \\ S' &\equiv \phi(x, y) = 0 \end{aligned}\right\}$$ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಅವುಗಳ ಒಂದು ಛೇದನ ಬಿಂದು P (x_1, y_1) ಆಗಿರಲಿ.

$$\left.\begin{aligned} \therefore\ S_1 &\equiv f(x_1, y_1) = 0 \\ S_1' &\equiv \phi(x_1, y_1) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

λ ಯಾವುದೇ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವಾಗ

$$S + \lambda S' \equiv f(x, y) + \lambda\phi(x, y) = 0 \quad (2)$$

ಸಮಿಾಕರಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಇದು ಸೂಚಿಸುವ ವಕ್ರರೇಖೆಯು P ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗಿದರೆ

$$S_1 + \lambda S_1' \equiv f(x_1, y_1) + \lambda \phi(x_1, y_1) = 0$$

ಇದು ಸತ್ಯವಾಗಬೇಕು. (1) ರಲ್ಲಿರುವ ನಿಯಮಗಳಿಂದ, ಇದು λ ದ ವಿಶಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $S + \lambda S' = 0$ P ಯ ಮೂಲಕ, ಅದೇ ರೀತಿ ದತ್ತ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಎಲ್ಲ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವೂ ಸಾಗುವ ವಿಶಿಷ್ಟ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಸಮಿಾಕರಣವಾಗಿದೆ.

$$\therefore \left.\begin{aligned} L &\equiv ax + by + c = 0 \\ L' &\equiv a'x + b'y + c' = 0 \end{aligned}\right\}$$ ಎಂಬ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಎಲ್ಲ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮಿಾಕರಣವು $L + \lambda L' \equiv ax + by + c + \lambda(a'x + b'y + c') = 0$ (λ ದ ವಿಶಿಷ್ಟ ಸ್ಥಿರ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ) ಆಗಿದೆ. ಇದು x, y ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನೆಯ ಘಾತದ ಸಮಿಾಕರಣ ವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದೂ ಸಹ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನೇ ಸೂಚಿಸುವುದು.

2.12 ಮೂರು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗಲು ನಿಯಮ–

$$L \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$M \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$$
$$N \equiv a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

ಇವು P (x_1, y_1) ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ.

$$a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 0$$
$$a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 = 0$$
$$a_3x_1 + b_3y_1 + c_3 = 0$$

x_1, y_1 ಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಲಾಗಿ,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

ಇದೇ ಬೇಕಾದ ನಿಯಮ.

ಈಗ L, M, N ಗಳನ್ನು ಸಂಬಂಧಿಸುವಂತಹ $\lambda L + \mu M + \nu N = 0$ (λ, μ, ν ಗಳು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು) ನಿಯಮವಿದ್ದರೆ ಆ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗುವುವು ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

$$\lambda L + \mu M + \nu N = 0$$

$$\therefore L + \frac{\mu}{\lambda} M = -\frac{\nu}{\lambda} N$$

ಅಥವಾ $L + \mu' M = \nu' N$

ಇಲ್ಲಿ $L + \mu' M$, L ಮತ್ತು M ಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಎಲ್ಲ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ನೀಡುವುದು. ಇದು $\nu' N$ ಗೆ ಸಮಾನವಾದುದರಿಂದ N ಸಹ ಈ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.1

1 $3x + 4y + 7 = 0$ ಮತ್ತು $5x - y + 6 = 0$ ಇವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ಸರಳರೇಖೆಯು

(*a*) $x + y - 2 = 0$ ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ;

(*b*) $2x - 5y + 1 = 0$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ;

(*c*) x–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ -3 ರೇಖಾಂತರ ಮಾಡಿದರೆ;

(*d*) (3, 4) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗಿದರೆ;

(*e*) $x + y + 1 = 0$ ಯೊಡನೆ $\frac{\pi}{6}$ ಕೋನ ಉಂಟುಮಾಡಿದರೆ; ಮತ್ತು

(*f*) $x - y - 1 = 0$, $2x + y + 1 = 0$ ಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗಿದರೆ

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೂ ಅದರ ಸಮೀಕರಣವೇನು?

2 (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $ax + by + c = 0$ ಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬದ ಪಾದ (h, k) ಎಂದಾದರೆ,

$$\frac{h - x_1}{a} = \frac{k - y_1}{b} = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

3 $ax + by + c = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬ (x_2, y_2) ಆದರೆ

$$x_2 = x_1 - 2a\,\frac{(ax_1 + by_1 + c)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$y_2 = y_1 - 2b\,\frac{(ax_1 + by_1 + c)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4 $4x + 3y = 12$, $4x + 3y = 3$ ಇವು ಎರಡು ಸಮಾನಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳು. $(-2, -7)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಇವುಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಇಂಥವುಗಳಲ್ಲಿ, ಸಮಾನಾಂತರ ಸರಳ

ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ 3 ರೇಖಾಂತರ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5 ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳು

$$L_r \equiv x \cos \alpha_r + y \sin \alpha_r - p_r = 0, \ (r = 1, 2, 3)$$

ಆ ತ್ರಿಭುಜದ ಲಂಬಕೇಂದ್ರವನ್ನು

$$L_1 \cos (\alpha_2 - \alpha_2) = L_2 \cos (\alpha_3 - \alpha_1) = L_3 \cos (\alpha_1 - \alpha_2)$$

ನಿರ್ಧರಿಸುವುವು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

6 $px + qy + r = 0$ ಮತ್ತು $L = 0$ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು. ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು $lx + my + n = 0$ ಸಮಭಾಗಿಸುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ,

$$L \equiv (px + qy + r)(l^2 + m^2) - 2(lp + mq)(lx + my + n) = 0$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

7 $2x + 3y - 8 + \lambda(4x - 7y + 10) = 0$

$3x + 4y - 11 + \mu(2x - 5y + 8) = 0$

λ ಮತ್ತು μ ಗಳ ವಿವಿಧ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥ ಆಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

8 $y = m_r x + c_r, \ (r = 1, 2, 3)$ ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ರಚಿಸುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $\frac{1}{2} \sum \frac{(c_1 - c_2)^2}{m_1 - m_2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

9 $$\left.\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ lx + my + n &= 0 \\ px + qy + r &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ಇವು ರಚಿಸುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಲಂಬಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ

$$\frac{ax + by + c}{ap + bq} = \frac{lx + my + n}{lp + mq}$$

ಈ ಸರಳರೇಖೆಯು ಸಾಗುತ್ತಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

10 $4y - 3x - 1 = 0, \qquad 3y - 4x + 1 = 0$

$4y - 3x - 3 = 0, \qquad 3y - 4x + 2 = 0$

ಈ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವೆಷ್ಟು?

ಮೂರನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯ

ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಜೊತೆಗಳು

3.1 ಒಂದು ಜೊತೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳು—

$(y - m_1 x)\ (y - m_2 x) = 0$ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಇದರಿಂದ, $\left.\begin{array}{l} y = m_1 x \\ y = m_2 x \end{array}\right\}$ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ. ಇವು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು. $\therefore$ $(y - m_1 x)\ (y - m_2 x) = 0$ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಒಟ್ಟಾದ ಸಮೀಕರಣ. ಇದರ ವಿಸ್ತೃತರೂಪ $m_1 m_2 x^2 - (m_1 + m_2)\ xy + y^2 = 0$ ಎಂದಿರುವುದು. ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಗುಣಗಳು ಹೀಗಿವೆ—

(1) ಇದು x ಮತ್ತು y ಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಘಾತದ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ.

(2) ಇದರ ಎಡಭಾಗವನ್ನು ಎರಡು ಸರಳ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಅಪವರ್ತಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.

(3) ಈ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನೀಡುವುವು.

ಇಂತಹ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪ

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0.$ ಇಲ್ಲಿ a, b, h ಗಳು ಸ್ಥಿರಗುಣಕಗಳು.

x^2 ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಇದನ್ನು $\left(\frac{y}{x}\right)$ ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು. $\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{2h}{b}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{a}{b} = 0$

$$\therefore\ \frac{y}{x} = \frac{-\frac{2h}{b} \pm \sqrt{\frac{4h^2}{b^2} - \frac{4a}{b}}}{2} = -\frac{h}{b} \pm \frac{1}{b}\sqrt{h^2 - ab}$$

$$\therefore\ \frac{y}{x} = -\frac{1}{b}(h - \sqrt{h^2 - ab}) = m_1 \quad \text{ಎಂದಿರಲಿ}$$

$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{b}(h + \sqrt{h^2 - ab}) = m_2 \quad \text{ಎಂದಿರಲಿ}$$

$\left.\begin{array}{l}\therefore y = m_1 x \\ y = m_2 x\end{array}\right\}$ ಇವು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು.

$$m_1 = -\frac{h}{b} + \frac{\sqrt{h^2 - ab}}{b}$$

$$m_2 = -\frac{h}{b} - \frac{\sqrt{h^2 - ab}}{b}$$

$$\left.\begin{array}{r} m_1 + m_2 = -\dfrac{2h}{b} \\ m_1 m_2 = \dfrac{a}{b} \end{array}\right\} \qquad (3.1)$$

3.2 $U \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು—

$U = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳ ಬೆಲೆ

$$\pm \tan^{-1}\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right) = \pm \tan^{-1} \frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2}}{1 + m_1 m_2}$$

$$= \pm \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{\dfrac{4h^2}{b^2} - 4\dfrac{a}{b}}}{1 + \dfrac{a}{b}}\right]$$

$$= \pm \tan^{-1}\left[\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right] \qquad (3.2)$$

$a + b \neq 0$

$a + b = 0$ ಆದಾಗ $m_1 m_2 = \frac{a}{b} = -\frac{b}{b} = -1$ ಆಗುವುದು. ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವುವು.

$U = 0$ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳ ಸಮೀಕರಣ (2.8)

$$\frac{y - m_1 x}{\sqrt{1 + m_1^2}} = \pm \frac{(y - m_2 x)}{\sqrt{1 + m_2^2}}$$

∴ ಇವುಗಳ ಒಟ್ಟಾದ ಸಮೀಕರಣವು

$$\left[\frac{y - m_1 x}{\sqrt{1 + m_1^2}} - \frac{y - m_2 x}{\sqrt{1 + m_2^2}}\right]\left[\frac{y - m_1 x}{\sqrt{1 + m_1^2}} + \frac{y - m_2 x}{\sqrt{1 - m_2^2}}\right] = 0$$

$$\frac{(y - m_1 x)^2}{1 + m_1^2} - \frac{(y - m_2 x)^2}{1 + m_2^2} = 0$$

ಸರಳೀಕರಿಸಿ $(m_1 - m_2)$ ನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ $(m_1 - m_2 \neq 0)$

$$(m_1 + m_2)(x^2 - y^2) = 2xy(1 - m_1 m_2)$$

$$\therefore \frac{-2h}{b}(x^2 - y^2) = 2xy\left(1 - \frac{a}{b}\right)$$

$$\therefore \frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h} \qquad (3.3)$$

3.3 x, y ಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಘಾತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ— 3.1 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{array}\right\}$$ ಇವೆರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಒಟ್ಟಾದ ಸಮೀಕರಣವು ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

$$(a_1 x + b_1 y + c_1)(a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$$

ಆಗಿದೆ. ಇದರ ಗುಣಗಳು ಹೀಗಿವೆ—

(1) ಇದು x ಮತ್ತು y ಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಘಾತದ ಸಮೀಕರಣ.

(2) ಇದರ ಎಡಭಾಗವನ್ನು ಎರಡು ಸರಳ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಅಪವರ್ತಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.

(3) ಈ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನೀಡುವುವು.

$S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ಇದು x ಮತ್ತು y ಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಘಾತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ. ಇಲ್ಲಿ $a, b, \ldots f, g, h$ ಗಳು ಸ್ಥಿರಗುಣಕಗಳು. x ಅಥವಾ y ಚರಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿ ಇನ್ನೊಂದು ಚರದ ಅನುರೂಪ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಈ ಸಮೀಕರಣ ಸೂಚಿಸುವ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸಬಹುದು. ಒಂದು ವಿಶೇಷ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಇದು ಒಂದು ಜೊತೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯಿದೆ. ಹೀಗಾಗ ಬೇಕಾದರೆ S ನ್ನು ಎರಡು ಸರಳ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾಗಬೇಕು.

$$S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$
$$ax^2 + 2x(hy + g) + (by^2 + 2fy + c) = 0$$

(x ನಲ್ಲಿ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಾಗಿ ಪುನರ್ವ್ಯವಸ್ಥಿಸಿದ್ದೇವೆ). ಇಲ್ಲಿ x ಗೆ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮೂಲಗಳಿರಬೇಕು.

$$\therefore \triangle = 4[(hy + g)^2 - a(by^2 + 2fy + c)]$$

$= 4[y^2(h^2 - ab) + 2y(gh - af) + g^2 - ac]$, ಇದು ಶುದ್ಧ ವರ್ಗವಾಗಬೇಕು. ಅಂದರೆ ಇದರ ಶೋಧಕ

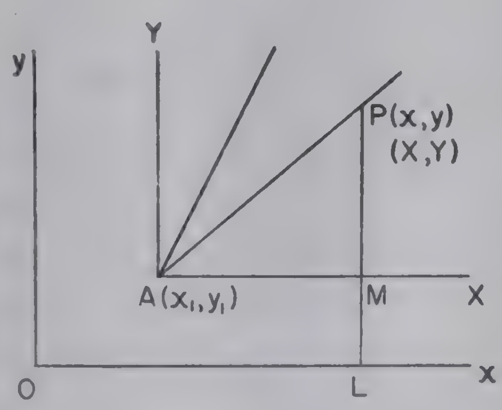
$$\triangle' = 4[(gh - af)^2 - (h^2 - ab)(g^2 - ac)] = 0 \text{ ಆಗಬೇಕು.}$$
$$\therefore a(-abc - 2fgh + af^2 + bg^2 + ch^2) = 0$$
$$a \neq 0 \quad \therefore \quad abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0 \qquad (3.4)$$

ಸ್ಥಿರ ಗುಣಕಗಳು ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಪಾಲಿಸಿದಾಗ $S = 0$ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.

3.4 $S = 0$ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಮತ್ತು ಸಾಕಾದ ನಿಯಮ—

$S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು (3.4) ರ ನಿಯಮವು ಬೇಕು ಎಂದು ಮೊದಲು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ.

$S = 0$, $A(x_1, y_1)$ ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ. AX, AY ಗಳನ್ನು ox, oy ಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. $P(x, y)$ ಈ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು. AX, AY ಅಕ್ಷಗಳ ಪ್ರಕಾರ ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (X, Y) ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ



ಚಿತ್ರ 3.1

$$x = x_1 + X$$
$$y = y_1 + Y$$

$\therefore$ AX, AY ಪ್ರಕಾರ $S = 0$ ಇದರ ಪರಿವರ್ತಿತರೂಪವು—

$$a(x_1+X)^2+2h(x_1+X)(y_1+Y)+b(y_1+Y)^2$$
$$+2g(x_1+X)+2f(y_1+Y)+c=0$$

ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದರೆ,

$$aX^2+2hXY+bY^2+2X(ax_1+hy_1+g)+2Y(hx_1+by_1+f)+$$
$$(ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c)=0$$

ಎಂದಾಗುವುದು.

ಇದು ಈಗಿನ ಮೂಲಬಿಂದು A ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣವಾದುದರಿಂದ, X, Y ಗಳ ವಿಶಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಸಮಾನಘಾತದ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಾಗಿರಬೇಕು. ಆಗ X. Y ಗಳ ಗುಣಕಗಳು ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಸ್ಥಿರ ಉತ್ಪನ್ನ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಶೂನ್ಯವಾಗಬೇಕು.

$$\therefore ax_1+hy_1+g=0 \qquad (1)$$

$$hx_1+by_1+f=0 \qquad (2)$$

$$ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0 \qquad (3\,a)$$

$$\therefore x_1(ax_1+hy_1+g)+y_1(hx_1+by_1+f)$$
$$+gx_1+fy_1+c=0 \qquad (3\,b)$$

$$\therefore gx_1+fy_1+c=0 \qquad (3\,c)$$

(1), (2) ರಿಂದ $\dfrac{x_1}{hf-bg}=\dfrac{y_1}{gh-af}=\dfrac{1}{ab-h^2}$

$$\therefore x_1=\frac{hf-bg}{ab-h^2},\quad y_1=\frac{gh-af}{ab-h^2},\quad ab-h^2\neq 0$$

ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು (3c) ಯಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$g\left(\frac{hf-bg}{ab-h^2}\right)+f\left(\frac{gh-af}{ab-h^2}\right)+c=0$$

$$fgh-bg^2+fgh-af^2+cab-ch^2=0 \qquad (3.4)$$

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$$

(1), (2), (3c) ಗಳಲ್ಲಿ x_1. y_1 ಗಳಲ್ಲಿ ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=0 \qquad (3.4)$$

ಇದನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿದರೆ ಮೇಲಿನ ಉತ್ತರವೇ ಲಭಿಸುವುದು. ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳ

ಛೇದನ ಬಿಂದು $\left[\frac{hf-bg}{ab-h^2}, \frac{gh-af}{ab-h^2}\right]$ (3.5)

$$ab - h^2 \neq 0$$

ಈಗ (3.4) ರ ನಿಯಮವು ಸಾಕು ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ $S = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಸ್ಥಿರಗುಣಕಗಳು

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$$

ನಿಯಮವನ್ನು ಪಾಲಿಸಿದರೆ $S = 0$ ಯನ್ನು ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ.

$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$ ಎಂದಿರುವಾಗ x_1, y_1 ಗಳೆಂಬ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು

$$ax_1 + hy_1 + g = 0 \quad (1)$$

$$hx_1 + by_1 + f = 0 \quad (2)$$

$$gx_1 + fy_1 + c = 0 \quad (3)$$

ಈ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುವಂತೆ ಆರಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯ. ox, oy ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು (x_1, y_1) ಸೂಚಿಸುವ A ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಸ್ಥಾನಪಲ್ಲಟನ ಮಾಡಿ, ನೂತನ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು AX, AY ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ವಿನಿಮಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು X Y ಎಂದಿದ್ದರೆ,

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + X \\ y = y_1 + Y \end{array}\right\}, \quad (1.1) \text{ ನ್ನು ನೋಡಿ.}$$

ನೂತನ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ $S = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿವರ್ತಿತ ರೂಪವು,

$$aX^2 + 2hXy + bY^2 + 2X(ax_1 + hy_1 + g) + 2Y(hx_1 + by_1 + f)$$
$$+ x_1(ax_1 + hy_1 + g) + y_1(hx_1 + by_1 + f) + (gx_1 + fy_1 + c) = 0$$

ಎಂದಿದೆ. (1), (2), (3) ರಿಂದ $aX^2 + 2hXY + bY^2 = 0$ ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ.

3.5 ವಿಶೇಷ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳು—$S = 0$ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಾಗ,

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$$

ಎಂದೂ, ಛೇದನಬಿಂದು

$$\left(\frac{hf - bg}{ab - h^2}, \frac{gh - af}{ab - h^2}\right), \quad ab - h^2 \neq 0$$

ಎಂದೂ ಗೊತ್ತಿದೆ.

I $ab - h^2 = 0$ ಆದಾಗ $S = 0$ ಸಮಾನಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಆಗ,

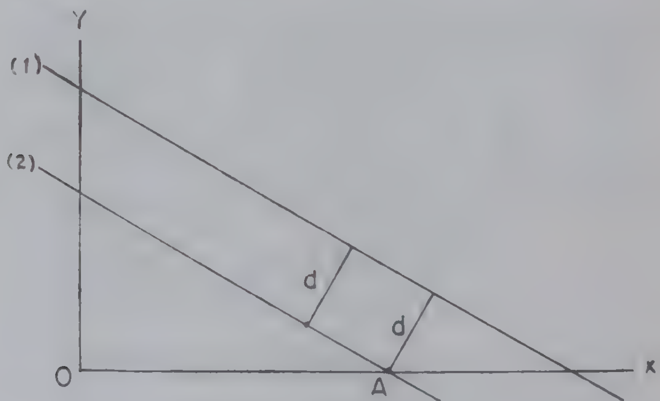
$$0 = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$$

$$= c(ab - h^2) \pm 2fg\sqrt{ab} - af^2 - bg^2$$

$$= -(\sqrt{a}\,.\,f \mp \sqrt{b}\,.\,g)^2$$

$\therefore \quad af^2 = bg^2 \qquad\qquad \therefore \quad ab - h^2$ ಮತ್ತು $af^2 = bg^2$ ಆದಾಗ $S = 0$ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳಾಗುವುದು.

II ಸಮಾನಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 3.2

$$S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$ax^2 + 2x(hy + g) + by^2 + 2fy + c = 0$$

$$ax = -(hy + g) \pm \sqrt{y^2(h^2 - ab) + 2y(gh - af) + g^2 - ac}$$

ಈಗ $ab = h^2$. $af^2 = bg^2$ ಎಂದು ಗೊತ್ತಿದೆ.

$$\therefore g^2 . ab + a . af^2 = g^2h^2 + abg^2$$

$$\therefore af = gh$$

$$\therefore \quad ax + hy + g = \pm \sqrt{g^2 - ac}$$

ಅಥವಾ, $ax + hy + g + \sqrt{g^2 - ac} = 0$ (1)

$ax + hy + g - \sqrt{g^2 - ac} = 0$ (2)

ಇವು ಸಮಾನಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು. ಇವುಗಳ ಪೈಕಿ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ x–ಅಕ್ಷವನ್ನು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಆಗ A ಬಿಂದುವು

$$\left[\frac{\sqrt{g^2 - ac} - g}{a}, 0\right]$$ ಆಗುವುದು.

A ಯಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವೇ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಅಂತರ, d.

$$\therefore \quad d = \frac{\sqrt{g^2 - ac} - g + g + \sqrt{g^2 - ac}}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{g^2 - ac}}{\sqrt{a^2 + ab}} = 2\sqrt{\frac{g^2 - ac}{a(a + b)}}$$

III $S = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳು

$$\pm \tan^{-1} \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}$$ ಆಗಿವೆ.

ಅವು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ $a + b = 0$

IV $S = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳ ಒಟ್ಟಾದ ಸಮೀಕರಣ

$$\frac{(x - x_1)^2 - (y - y_1)^2}{a - b} = \frac{xy}{h}$$

V $S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗೆ $S' \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ನಾಲ್ಕು ರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತವೆ. $S + \lambda S' = 0$, λ ದ ವಿಶಿಷ್ಟ ಸ್ಥಿರ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ

ಸಾಗುವ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು (2.11 ಪರಿಚ್ಛೇದ). $\lambda = -1$ ಆದಾಗ ಇದರ ರೂಪ $2gx + 2fy + c = 0$ ಆಗುವುದು. ಇದು ಸರಳರೇಖೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು (ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗದ) ಕರ್ಣವಾಗಿದೆ.

$\therefore S = 0,\ S' = 0$ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಂದು ಕರ್ಣವು $2gx + 2fy + c = 0$

ಇನ್ನೊಂದು ಕರ್ಣವು [ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು ಮತ್ತು $S = 0$ ಯ ಛೇದನ ಬಿಂದು (x_1, y_1) ನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖೆ]

$$y = \frac{y_1}{x_1} \cdot x$$

ಈಗ, ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಅದರ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರಬೇಕು. ಇದರ ನಿಯಮ,

$$\frac{y_1}{x_1} \times -\frac{g}{f} = -1$$

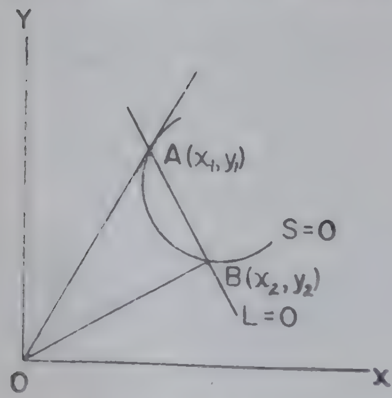
$$\therefore \frac{gh - af}{hf - bg} \times \frac{g}{f} = 1$$

$$\therefore g^2h - gaf - hf^2 + fbg = 0$$

$$\therefore h(f^2 - g^2) = fg(b - a)$$

3.6 ಸಮಾನ ಘಾತದ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ—

$S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಂದು ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.



ಚಿತ್ರ 3.3

$L \equiv lx + my - 1 = 0$ ಇದೊಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಸರಳರೇಖೆ. ಇವೆರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ x (ಅಥವಾ y) ನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿ ದೊರೆಯುವ y (ಅಥವಾ x) ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಹೀಗೆ ದೊರೆಯುವ ಮೂಲಗಳು y_1, y_2 ಮತ್ತು x_1, x_2 ಎಂದಿದ್ದರೆ, (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳು $S = 0$, $L = 0$ ಇವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ. $S = 0$ ಯನ್ನು $L = 0$ ದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಮಾನಘಾತಗೊಳಿಸಿದರೆ,

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx \cdot 1 + 2fy \cdot 1 + c \cdot 1^2 = 0$$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + (2gx + 2fy)(lx + my) + c(lx+my)^2 = 0 \quad \text{(I)}$$

ದೊರೆಯುವುದು. ಇದು x, y ಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾನಘಾತದ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ. A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) ಗಳು ಇದರ ಮೇಲಿರುವುದಾದರೆ,

$$ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + (2gx_1 + 2fy_1)(lx_1 + my_1) + (lx_1 + my_1)^2 c = 0 \quad (1)$$

ಮತ್ತು $ax_2^2 + 2hx_2y_2 + by_2^2 + (2gx_2 + 2fy_2)(lx_2 + my_2) + (lx_2 + my_2)^2 c = 0 \quad (2)$

ಸತ್ಯವಾಗಬೇಕು. A, B ಗಳು $S = 0$, $L = 0$ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ

$$ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \quad (3)$$

$$lx_1 + my_1 - 1 = 0 \quad (4)$$

ಇತ್ಯಾದಿ ಸತ್ಯವಾಗಿವೆ. (1) ರಲ್ಲಿ

ಎಡಬದಿ $= ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + (2gx_1 + 2fy_1) \times 1 + c \times 1^2$
$= 0$, [(4) ರ ಸಹಾಯದಿಂದ]

$= 0$, (3) ರ ಸಹಾಯದಿಂದ

$=$ ಬಲಬದಿ.

$\therefore$ (1), ಅದೇ ರೀತಿ (2) ಸತ್ಯವಾಗಿವೆ.

$\therefore$ (I) ಸಮೀಕರಣವು OA, OB ಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ. ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ: ಒಂದು ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮತ್ತು ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವಿಗೆ ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಒಟ್ಟಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು, ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಮಾನಘಾತಗೊಳಿಸಿ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.1

1. $2x^2 - xy - y^2 - 10x + 7y + 8 = 0$ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಅವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವನ್ನೂ, ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2 ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುವು. ಆಯಾ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿರುವ ಅಜ್ಞಾತ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ—

(a) $12x^2 + 7xy + by^2 + 13x - y + 3 = 0$

(b) $12x^2 - 10xy + 2y^2 + 14x - 5y + c = 0$

(c) $ax^2 + 11xy + 4y^2 + 4x + 7y - 2 = 0$

3 $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬರೇಖೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ

$ay^2 - 2hxy + bx^2 = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

4 $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ಮತ್ತು $lx + my - 1 = 0$ ರಚಿಸುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $\dfrac{\sqrt{h^2 - ab}}{am^2 - 2hlm + bl^2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5 (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ ರೇಖೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು

$\dfrac{ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6 $(ab - h^2)(ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy) + af^2 + bg^2 + ch^2 = 0$ ಸಮೀಕರಣವು ಒಂದು ಜೊತೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಇನ್ನು ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ

$S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$S' \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.

7 $S = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ

$f^4 - g^4 = c(bf^2 - ag^2)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

8 ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $S = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ದೂರದ ವರ್ಗ $\dfrac{c(a+b) - f^2 - g^2}{ab - h^2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವಾಗ ಈ ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆ $\dfrac{f^2 + g^2}{b^2 + h^2}$ ಎಂದೂ ಸಾಧಿಸಿ.

9 $S = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಲಂಬರೇಖೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು $\dfrac{c}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

10 $(a-b)(x^2-y^2)+4hxy=0$ ಮತ್ತು

$$h(x^2-y^2)=(a-b)\,xy$$

ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಕೋನದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

11 $S'=0$ ಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟವು ಇನ್ನೊಂದರ ಓಟದ ಎರಡರಷ್ಟಾದರೆ $8h^2=9ab$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

12 $(c, 0)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $S'=0$ ಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ ಪಾದಗಳು L, M. LM ನ ಸಮೀಕರಣವು $(a-b)x+2hy+bc=0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

13 $S'=0$ ಮತ್ತು $a_1x^2+2h_1xy+b_1y^2=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಜೊತೆಯ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಎರಡನೆಯದರ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ $4(ah_1+bh_1)(ha_1+bh_1)+(aa_1-bb_1)^2=0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

14 ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಜೊತೆಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಿದ್ದರೆ $(ab_1-a_1b)^2+4(ah_1-a_1h)(bh_1-b_1h)=0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

15 $S=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು y–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಛೇದಿಸಿದರೆ $2fgh-bg^2-ch^2=0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

16 $4x^2+5xy-2y^2+6x+3y-7=0$

ಮತ್ತು $3x+5y-1=0$ ಇವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವಿಗೆ ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17 $lx+my=1$ ಮತ್ತು $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$ ಇವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾ (chord) ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ರಚಿಸುವ ಕೋನವೆಷ್ಟು? ಇದು $\frac{\pi}{2}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ನಿಯಮವೇನು?

18 $S-\lambda(x^2+y^2)=0$, λ ದ ವಿವಿಧ ಸ್ಥಿರ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಕೋನದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

19 $ax + by + c = 0$ ಮತ್ತು

$$(ax + by)^2 - 3(ay - bx)^2 = 0$$

ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುವು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

20 $(y - mx)^2 = c^2(1 + m^2)$ ಮತ್ತು

$$(y - lx)^2 = c^2(1 + l^2)$$

ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

21 $S = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳೂ x–ಅಕ್ಷವೂ ರಚಿಸುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $\dfrac{\sqrt{(a - b)^2 + 4h^2}}{2h} \cdot \dfrac{ac - g^2}{ab - h^2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ನಾಲ್ಕನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯ

ವೃತ್ತ

4.1 ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ—ದತ್ತ ಸ್ಥಿರಬಿಂದುವಿನಿಂದ ದತ್ತ ಸ್ಥಿರ ದೂರದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ (ಸಮತಲ) ವಕ್ರರೇಖೆಯು ವೃತ್ತ. ಸ್ಥಿರಬಿಂದು ಇದರ ಕೇಂದ್ರ. ವಕ್ರರೇಖೆಯು ಪರಿಧಿ. ಸ್ಥಿರದೂರ ತ್ರಿಜ್ಯ. $C(h, k)$ ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದು ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು r ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ,

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \qquad (4.1)$$

ಅಥವಾ, $x^2+y^2-2hx-2ky+(h^2+k^2-r^2)=0$. ಇದು x, y ಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಘಾತದ ಸಮೀಕರಣ. ಇದರಲ್ಲಿ x^2 ಮತ್ತು y^2 ಗಳ ಗುಣಕಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ; xy ಪದ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

ಈಗ $S \equiv ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ ಎನ್ನುವ x, y ಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಘಾತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಮೇಲಿನ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಇದಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸಿ, $a=b$, $h=0$ ಎಂದು ಬರೆದಾಗ, $a(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0$ ದೊರೆಯುವುದು.

$$\therefore\ x^2+y^2+\frac{2g}{a}x+\frac{2f}{a}y+\frac{c}{a}=0$$

$$\therefore\ \left(x+\frac{g}{a}\right)^2+\left(y+\frac{f}{a}\right)^2-\frac{g^2}{a^2}-\frac{f^2}{a^2}+\frac{c}{a}=0$$

$$\therefore\ \left[x-\left(-\frac{g}{a}\right)\right]^2+\left[y-\left(-\frac{f}{a}\right)\right]^2=\left[\sqrt{\frac{g^2+f^2-ca}{a^2}}\right]^2$$

ಇದನ್ನು (4.1) ರೊಡನೆ ಹೋಲಿಸಿದರೆ, ಇದು $\left(-\frac{g}{a}, -\frac{f}{a}\right)$ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು $\frac{\sqrt{g^2+f^2-ca}}{a}$ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿ ಇರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

$\frac{g}{a}$, $\frac{f}{a}$, $\frac{c}{a}$ ಗಳು ಸ್ಥಿರಗುಣಕಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ರೂಢಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣದ ಸುಲಭರೂಪವನ್ನು $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ಎಂದೇ ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದರ ಕೇಂದ್ರ $(-g, -f)$, ತ್ರಿಜ್ಯ $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$.

ಮೂಲ ಬಿಂದು ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು r ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು $x^2 + y^2 = r^2$. ಇಂತಹ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು $P(x, y)$ ಆಗಿರಲಿ. ಅದರ ಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (r, θ) ಎಂದಿದ್ದರೆ,

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

θ ದ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಈ ಬಿಂದು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವು ವೃತ್ತದ ಪ್ರಾಚಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು. θ ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಚಲ.

4.2 ಒಂದು ಜೊತೆ ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳ ಜೋಡಣೆಯು ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತ—$A(a, b)$, $B(c, d)$ ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. $P(x, y)$ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

$$\therefore \angle APB = \frac{\pi}{2}$$

PA ಯ ಓಟ $= \dfrac{y-b}{x-a}$, PB ಯ ಓಟ $= \dfrac{y-d}{x-c}$

$$\therefore \frac{y-b}{x-a} \times \frac{y-d}{x-c} = -1$$

∴ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು

$$(x-a)(x-c) + (y-b)(y-d) = 0 \qquad (4.3)$$

4.3 ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಸರಳರೇಖೆ—

$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - r^2 &= 0 \\ y &= mx + c \end{aligned}\right\}$ ಇವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಬೇಕು.

$$\therefore x^2 + (mx + c)^2 - r^2 = 0$$
$$(1 + m^2)x^2 + 2mcx + c^2 - r^2 = 0$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಈ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ x_1, x_2 ಎನ್ನುವ ಎರಡು ಮೂಲಗಳಿವೆ; y ಯ ಅನುರೂಪ ಮೂಲಗಳಾದ y_1, y_2 ಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಬಹುದು.

ಆಗ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳು ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನದ ಬಿಂದುಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಈ ಬಿಂದುಗಳು

ವಾಸ್ತವಿಕ
ಸಂಗಮ
ಊಹಾಜನ್ಯ } ಆಗಿದ್ದರೆ, $\triangle = 4m^2c^2 - 4(1+m^2)(c^2-r^2) \gtreqless 0$

ಅಂದರೆ, $c^2 \lesseqgtr r^2(1+m^2)$

ಸರಳರೇಖೆಯು ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಛೇದನಬಿಂದುಗಳು ಸಂಗಮಿಸಬೇಕು. ಅದರ ನಿಯಮ

$$c^2 = r^2(1+m^2) \tag{4.4}$$

$$c = \pm r\sqrt{1+m^2} \tag{4.4}$$

$$\therefore y = mx \pm r\sqrt{1+m}^2$$

ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾನಾಂತರ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು.

$y = mx + r\sqrt{1+m^2}$ ಎನ್ನುವ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. m ನ ವಿಶಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಇದು ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿದೆ. ಇದು (x_1, y_1) ಎನ್ನುವ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗಲಿ. ಆಗ,

$$y_1 = mx_1 + r\sqrt{1+m^2}$$

$$\therefore (y_1 - mx_1)^2 = r^2(1+m^2)$$

$$\therefore m^2(x_1^2 - r^2) - 2x_1y_1 \,.\, m + (y_1^2 - r^2) = 0$$

ಇದು m ನಲ್ಲಿ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಇದಕ್ಕೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಎರಡು ಮೂಲಗಳಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು. ಈ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಓಟಗಳು m_1, m_2 ಎಂದಿದ್ದರೆ,

$$m_1 + m_2 = \frac{2x_1y_1}{x_1^2 - r^2}$$

$$m_1m_2 = \frac{y_1^2 - r^2}{x_1^2 - r^2}$$

ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಜೊತೆ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ, $m_1m_2 = -1$

$$\therefore x_1^2 + y_1^2 = 2r^2$$

$\therefore$ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ

$x^2 + y^2 = 2r^2$. ಇದು ಇನ್ನೊಂದು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯವೃತ್ತ.

4.4 x, y ಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಘಾತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ, $S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = o$—

$S = 0$ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ನಿಯಮವನ್ನು ಪಾಲಿಸಿದರೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನೂ, ಇನ್ನೊಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ನಿಯಮವನ್ನು ಪಾಲಿಸಿದರೆ ವೃತ್ತವನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುವುದೆಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, $S = 0$ ಒಂದು ಎರಡನೆಯ ಘಾತದ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದೆಂದೂ, ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಎರಡು ಸಂದರ್ಭಗಳು ಇದರ ಎರಡು ವಿಶಿಷ್ಟರೂಪಗಳೆಂದೂ ಭಾವಿಸಿ ನಮ್ಮ ಅಭ್ಯಾಸವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸಿ ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತೇವೆ.

$S = 0$ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು $L = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ (3.6 ಪರಿಚ್ಛೇದ) ಛೇದಿಸುವುದು. ಇವು P, Q ಎಂದಿದ್ದರೆ PQ ಸರಳರೇಖೆ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಜ್ಯಾ; Q ಬಿಂದು P ಯಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಿಸಿದಾಗ PQ ಜ್ಯಾವು ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ P ಯಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗುವುದು.

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕು.

$$S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$$

$$S_1 \equiv axx_1 + h(xy_1 + x_1y) + byy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c$$

$$S_{11} \equiv ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

$$S_{12} \equiv ax_1x_2 + h(x_1y_2 + x_2y_1) + by_1y_2 + g(x_1 + x_2) + f(y_1 + y_2) + c$$

$S_{12} = S_{21}$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

I PQ ಜ್ಯಾದ ಸಮೀಕರಣ. $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ $S = 0$ ಮೇಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು.

$AS_1 + BS_2 + C = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಇದು x, y ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನೆಯ ಘಾತದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿದೆ. P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಇದು ಸಾಗುವಂತೆ ವಿಧಿಸಿದರೆ, ಕ್ರಮವಾಗಿ,

$$AS_{11} + BS_{12} + C = 0 \quad \text{ಮತ್ತು}$$

$$AS_{12} + BS_{22} + C = 0$$

P, Q ಗಳು $S = 0$ ಮೇಲಿವೆ. $\therefore S_{11} = S_{22} = 0$

$$\therefore B = -\frac{C}{S_{12}}, \quad A = -\frac{C}{S_{12}}$$

$$\therefore \text{PQ ಜ್ಯಾದ ಸಮೀಕರಣವು } -\frac{CS_1}{S_{12}} - \frac{CS_2}{S_{12}} + C = 0$$

ಅಥವಾ $S_1 + S_2 = S_{12}$ (4.5)

II Q ಬಿಂದು P ಯಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಿಸಿದಾಗ ಇದರ ರೂಪ ($x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಬೇಕು).

$$S_1 + S_1 = S_{11}, \text{ ಆದರೆ } S_{11} = 0$$

$$\therefore \; S_1 = 0 \tag{4.6}$$

ಇದು $S = 0$ ಗೆ P ಯಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣ.

III P ಬಿಂದು $S = 0$ ಮೇಲೆ ಇರದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. 4.3 ಪರಿಚ್ಛೇದದ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸಿ $S = 0$ ಗೂ ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದು. ಆ ಪ್ರಕಾರ P ಯಿಂದ $S = 0$ ಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು. ಅವು PQ, PR ಆಗಿರಲಿ. QR ನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಪರ್ಶಕಜ್ಯಾ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. P, Q, R ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ಎಂದಿರಲಿ. QP ಯು Q ನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ಸಮೀಕರಣ $S_2 = 0$. ಇದೇ ರೀತಿ RP ಯ ಸಮೀಕರಣ $S_3 = 0$. ಇವೆರಡೂ $P(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದರಿಂದ, $S_{12} = 0$ ಮತ್ತು $S_{13} = 0$. ಈಗ, $S_1 = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಇದೊಂದು ಸರಳರೇಖೆ. ಇದು $Q(x_2, y_2)$ ಮೂಲಕ ಸಾಗಬೇಕಾದರೆ, $S_{12} = 0$ ಆಗಬೇಕು; ಇದು ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಹಾಗೆಯೇ $R(x_3, y_3)$ ಮೂಲಕ ಸಾಗಬೇಕಾದರೆ, $S_{13} = 0$ ಆಗಬೇಕು; ಇದೂ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ. $\therefore$ $S_1 = 0$ ಯು QR ನ ಅಂದರೆ P ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕಜ್ಯಾವಿನ ಸಮೀಕರಣ.

IV ದತ್ತಬಿಂದು P ಯ ಮೂಲಕ ಹಲವಾರು ಛೇದಕಗಳನ್ನು $S = 0$ ಗೆ ಎಳೆಯಬೇಕು. ಇವು $S = 0$ ಯನ್ನು Q_1, R_1; Q_2, R_2; ಇತ್ಯಾದಿ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಈ ಬಿಂದು ಯುಗ್ಮಗಳಲ್ಲಿ $S = 0$ ಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ T_1, T_2, ಇತ್ಯಾದಿ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. ಆಗ T_1, T_2 ಮುಂತಾದುವುಗಳು ರಚಿಸುವ ಪಥವನ್ನು $S = 0$ ಗೆ P ಯ ಧ್ರುವೀಯ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಧ್ರುವೀಯಕ್ಕೆ P ಧ್ರುವವಾಗಿದೆ.

ದತ್ತಬಿಂದು P ಯು (x_1, y_1) ಆಗಿರಲಿ. ಪಥದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು T_1 (x_2, y_2) ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ ಮೇಲಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ $Q_1 R_1$ ಸರಳರೇಖೆಯು T_1 ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಪರ್ಶಕಜ್ಯಾ. $\therefore$ ಅದರ ಸಮೀಕರಣ, $S_2 = 0$ Q_1R_1 ಸರಳರೇಖೆಯು $P(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದು.

$$\therefore \; S_{12} = 0$$

$\therefore$ $T_1(x_2, y_2)$ ರ ಪಥಸಮೀಕರಣವು

$S_1 = 0$ ಆಗಿದೆ.

P ಬಿಂದುವು $S=0$ ಮೇಲೆಯೇ ಇದ್ದರೆ P ಯಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕ, P ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕಜ್ಯಾ, P ಯ ಧ್ರುವೀಯ ಎಲ್ಲವೂ ಸಂಗಮಿಸುತ್ತವೆ, ಇವೆಲ್ಲವುಗಳ ಸಮೀಕರಣವೂ $S_1=0$ ಎಂದು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಧ್ರುವೀಯವು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಎಂಬುದನ್ನೂ ಗಮನಿಸಬೇಕು.

V $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. ಅವು $S=0$ ಯ ಮೇಲೆ ಇಲ್ಲವೆಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ. PQ ಸರಳರೇಖೆಯು $S=0$ ಯನ್ನು L, M ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. $\frac{PL}{LQ}=\lambda$ ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ L ಬಿಂದು $\left[\frac{\lambda x_2+x_1}{\lambda+1,}, \frac{\lambda y_2+y_1}{\lambda+1}\right]$ ಆಗಿದೆ. ಇದು $S=0$ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ, $x=\frac{\lambda x_2+x_1}{\lambda+1}$, $y=\frac{\lambda y_2+y_1}{\lambda+1}$ ಎಂದು ಆ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಬೇಕು. ಆಗ,

$$S_{22}\lambda^2+2.S_{12}\lambda+S_{11}=0 \tag{4.7}$$

ಇದರ ಹೆಸರು ಜೋಕಿಮ್‌ಸ್ಥಾಲನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಮೀಕರಣ. ಇದು λ ದಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ. ಇದರ ಮೂಲಗಳು

λ_1, λ_2 ಆದರೆ, $\frac{PL}{LQ}=\lambda_1$, $\frac{PM}{MQ}=\lambda_2$

(*a*) L, M ಬಿಂದುಗಳು ಸಂಗಮಿಸಿದರೆ PQ ವು $S=0$ ಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗುವುದು. ಇದರ ನಿಯಮವು,

$$\triangle=4(S_{12}^2-S_{11}S_{22})=0$$

$P(x_1, y_1)$ ನ್ನು ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವೆಂದೂ, $Q(x_2, y_2)$ ಮೇಲಿನ ನಿಯಮಾನುಸಾರ ಚರಬಿಂದುವೆಂದೂ ಭಾವಿಸಿದರೆ, Q ವಿನ ಪಥಸಮೀಕರಣವು $S_1^2-S_{11}S=0$ ಅಥವಾ $SS_{11}=S_1^2$. ಇದು P ಯಿಂದ $S=0$ ಗೆ ಎಳೆದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ. (4.8)

(*b*) $P(x_1, y_1)$ ಬಿಂದು LM ನ ಮಧ್ಯಬಿಂದು, (ಆದ್ದರಿಂದ ಸ್ಥಿರಬಿಂದು) ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಇಂಥ ಜ್ಯಾ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ. Q ಇದರ ಮೇಲೆ ಎಲ್ಲಿಯೇ ಇದ್ದರೂ,

$$\frac{PL}{LQ}=\lambda_1,\ \frac{PM}{MQ}=\lambda_2,\ LP=PM$$

$$\therefore \frac{LQ}{PL} = \frac{1}{\lambda_1}, \quad \frac{MQ}{PM} = \frac{1}{\lambda_2}$$

$$\therefore \frac{LQ}{LP} = -\frac{1}{\lambda_1}, \quad \frac{MQ}{LP} = \frac{1}{\lambda_2}$$

$$\therefore \frac{MQ - LQ}{LP} = \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} = -\frac{2.S_{12}}{S_{11}}$$

$$\therefore -\frac{LM}{LP} = -2 = -\frac{2S_{12}}{S_{11}}, \therefore S_{11} = S_{12} \tag{4.9}$$

$\therefore Q(x_2, y_2)$ ರ ಪಥ $S_1 = S_{11}$. ಇಂಥ ಸಮೀಕರಣ ಒಂದೇ ಒಂದು ಬರುವುದರಿಂದ ದತ್ತಬಿಂದು P ಯಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಿಸಲ್ಪಡುವ ಜ್ಯಾ ಏಕೈಕ ವಾಗಿರುವುದು.

P ಯು $S = 0$ ಯ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುವಾದಾಗ ಇಂತಹ ಜ್ಯಾ ಏಕೈಕ ವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. P ಯ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಮತ್ತು $S = 0$ ವಕ್ರರೇಖೆಯಿಂದ ಪರಿಮಿತವಾಗಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜ್ಯಾವೂ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ P ಯಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಿಸಲ್ಪಡುವುದು.

(*c*) PQ ವನ್ನು L, M ಗಳು ಒಳಗೂ ಹೊರಗೂ ಒಂದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. $\therefore \frac{PL}{LQ} = \frac{PM}{QM}$ ಅಥವಾ $(PQ, LM) = -1$

$$\therefore \frac{PL}{LQ} = -\frac{PM}{MQ}$$

$$\therefore \lambda_1 = -\lambda_2, \ \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\therefore S_{12} = 0$$

ಈಗ $P(x_1, y_1)$ ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವಾಗಿ, $Q(x_2, y_2)$ ಈ ನಿಯಮಾನುಸಾರ ಚರ ಬಿಂದುವಾದರೆ, Q ವಿನ ಪಥ $S_1 = 0$ ಆಗುವುದು. ಇದು P ಯ ಧ್ರುವೀಯದ ಸಮೀಕರಣವೇ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ PLM ಛೇದಕದ ಮೇಲೆ, Q ಬಿಂದುವನ್ನು $(PQ, LM) = -1$ ಎಂದು ಆರಿಸಿದರೆ, ಛೇದಕದ ವಿವಿಧ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ Q ವಿನ ಪಥ P ಯ ಧ್ರುವೀಯವಾಗಿದೆ. ಮತ್ತು, P ಯ ಧ್ರುವೀಯವು PLM ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಛೇದಕವನ್ನು Q ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಿದರೆ, $(PQ, LM) = -1$ ಎಂದಾಗು ವುದು. Q ವನ್ನು P ಯ ಹರಾತ್ಮಕ ಅನುವರ್ತಿ (harmonic conjugate) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

4.5 ವೃತ್ತದ ವಿವಿಧ ರೇಖೆಗಳು—

$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ವೃತ್ತವು ಹಿಂದಿನ ಪರಿಚ್ಛೇದದ ಎರಡನೆಯ ಘಾತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣದ ವಿಶೇಷರೂಪ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ವೃತ್ತದ ವಿವಿಧ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಸೂತ್ರಗಳ ಪ್ರಕಾರ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

(1) ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಜ್ಯಾದ ಸಮೀಕರಣ.

$$[xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c] + [xx_2 + yy_2 + g(x + x_2) + f(y + y_2) + c] = x_1x_2 + y_1y_2 + g(x_1 + x_2) + f(y_1 + y_2) + c$$

(2) $P(x_1, y_1)$ ರಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣ

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$$

(3) ಹೊರ ಬಿಂದು $P(x_1, y_1)$ ರ ಸ್ಪರ್ಶಕಜ್ಯಾ ಮತ್ತು ಧ್ರುವೀಯಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ. P ಯು ಒಳಬಿಂದುವಾದಾಗ ಧ್ರುವೀಯ ಮಾತ್ರ ವಾಸ್ತವವಾಗಿರುವುದು. P ಯು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವಾಗ P ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕಜ್ಯಾ, ಧ್ರುವೀಯ ಮತ್ತು P ಯಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಸಂಗಮಿಸುವುವು.

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$$

(4) ಹೊರಬಿಂದು $P(x_1, y_1)$ ರಿಂದ ಎಳೆದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣವು,

$$(x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c)(x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c) = [xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c]^2$$

(5) $P(x_1, y_1)$ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿರುವ ಜ್ಯಾದ ಸಮೀಕರಣ,

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ, ಅದರಂತೆಯೇ ಮುಂದೆ ಬರುವ ವಕ್ರ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ, ಇವೆಲ್ಲ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನೂ ಪಡೆಯುವ ಕೆಲವು ವಿಶಿಷ್ಟ ಮತ್ತು ಸುಲಭ ಕ್ರಮಗಳಿವೆ. ಒಂದು ಕ್ರಮವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಇಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ.

$S = 0$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಒಂದು ಜ್ಯಾ LM ನ ಮಧ್ಯಬಿಂದು $P(x_1, y_1)$ ಆಗಿರಲಿ. ಈ ಜ್ಯಾದ ಓಟ $\tan\theta$ ಎಂದಿದ್ದರೆ, ಇದರ ಸಮೀಕರಣ,

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=r$$

$\therefore$ $(r\cos\theta+x_1, r\sin\theta+y_1)$ ಈ ಜ್ಯಾದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು. $r=$ PL ಎಂದು ಆರಿಸಿದಾಗ, ಇದು L ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಾಗುವುವು. ಅದು $S=0$ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ,

$$a(r\cos\theta+x_1)^2+2h(r\cos\theta+y_1)(r\sin\theta+y_1)$$
$$+b(r\sin\theta+y_1)^2+2g(r\cos\theta+x_1)+2f(r\sin\theta+y_1)+c=0$$
$$r^2[a\cos^2\theta+2h\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta]$$
$$+2r\{(ax_1+hy_1)\cos\theta+(hx_1+by_1)\sin\theta\}+S_{11}=0$$

r ನಲ್ಲಿ ಇದೊಂದು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ. ಇದರ ಎರಡು ಮೂಲಗಳು r_1, r_2 PL, PM ಗಳನ್ನು ನೀಡುವುವು. ಈಗ PL $=-$ PM, $\therefore$ PL $+$ PM $=0$, $\therefore\ r_1+r_2=0$

$$\therefore\ (ax_1+hy_1)\cos\theta+(hx_1+by_1)\sin\theta=0$$

$\therefore$ ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣ (LM)

$$\frac{x-x_1}{-(hx_1+by_1)}=\frac{y-y_1}{ax_1+hy_1}$$

$$(x-x_1)(ax_1+hy_1)+(y-y_1)(hx_1+by_1)=0$$

ಉದಾಹರಣೆ

1 $lx+my+n=0$ ಯು $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿದ್ದರೆ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು $P(x_1, y_1)$ ಆಗಿದ್ದರೆ

$x(x_1+g)+y(y_1+f)+gx_1+fy_1+c=0$ ಮತ್ತು $lx+my+n=0$ ಇವೆರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳೂ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿವೆ.

$$\therefore\ \frac{x_1+g}{l}=\frac{y_1+f}{m}=\frac{gx_1+fy_1+c}{n}$$

$$\text{ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ}=\frac{g^2+f^2-c}{gl+fm-n}$$

$$x_1=\frac{l(g^2+f^2-c)}{gl+fm-n}-g,\quad y_1=\frac{m(g^2+f^2-c)}{gl+fm-n}-f$$

2 $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0,\ lx + my = 1$ ಇವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳ ಜೋಡಣೆಯ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಸವಾಗಿ ರಚಿಸಿದ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳು (x_1, y_1), (x_2, y_2) ಎಂದಿದ್ದರೆ ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣವು,

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

$$x^2 + y^2 - x(x_1 + x_2) - y(y_1 + y_2) + x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \quad (1)$$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$$

$lx + my - 1 = 0$ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ y ಯನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ

$$ax^2 + 2hx\left(\frac{1 - lx}{m}\right) + b\left(\frac{1 - lx}{m}\right)^2 = 0$$

$$(m^2a - 2hlm + l^2b)\,x^2 + 2x(hm - bl) + b = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-2(hm - bl)}{am^2 - 2hlm + bl^2}$$

$$x_1x_2 = \frac{b}{am^2 - 2hlm + bl^2}$$

ಇದೇ ರೀತಿ,

$$y_1 + y_2 = -\frac{2(hl - am)}{am^2 - 2hlm + bl^2}$$

$$y_1\,y_2 = \frac{a}{am^2 - 2hlm + bl^2}$$

$\therefore$ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು

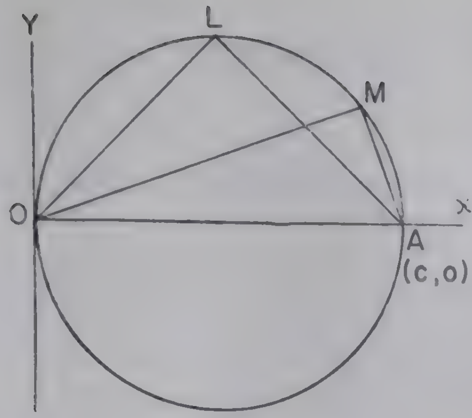
$$(x^2 + y^2)(am^2 - 2hlm + bl^2) + 2(hm - bl)\,x + 2(hl - am)\,y + a + b = 0$$

3 ಅಭ್ಯಾಸ 3.1 ರ 12 ನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆ.

OA ವ್ಯಾಸವಾಗಿ ರಚಿಸಿದ ವೃತ್ತ L, M ಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದು. ಈ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು

$$x^2 + y^2 - cx = 0$$

ಈಗ, $ax^2 + 2hxy + by^2 + \lambda(x^2 + y^2 - cx) = 0$



ಚಿತ್ರ 4.1

ಇದು λ ದ ಸ್ಥಿರಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. Oy. LM ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಸೇರಿವೆ. Oy ಯ ಸಮೀಕರಣ $x = 0$ ಎಂದಿರುವುದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ x ಅಪವರ್ತನವಾಗುವಂತೆ λ ವನ್ನು ಆರಿಸಬೇಕು. $\lambda = -b$

$$\therefore\ ax^2 + 2\,hxy - bx^2 + bcx = 0$$

$$x\,[ax + 2hy - bx + bc] = 0$$

$$\therefore\ (a - b)\,x + 2hy + bc = 0$$ LM ನ ಸಮೀಕರಣ.

4 $(a, 0)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳ ಪಾದಗಳ ಪಥವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y = mx + a\sqrt{1 + m^2}$ ಇದು ದತ್ತ ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕ. $(a, 0)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇದಕ್ಕೆಳೆದ ಲಂಬವು $y = -\frac{1}{m}(x - a)$ ಆಗಿದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ m ನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ, ಲಂಬಪಾದದ ಪಥಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುವುದು. $m = -\dfrac{(x - a)}{y}$

$$\therefore \left[y + \frac{x - a}{y}\,x \right]^2 = a^2 \left[1 + \frac{(x - a)^2}{y^2} \right]$$

$$\therefore\ (x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2\,[(x - a)^2 + y^2]$$

5 $x^2 + y^2 + 6x + 6y + 9 = 0$ ಮತ್ತು

$x^2 + y^2 + 2x - 8x - 5 = 0$

ಇವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಮತ್ತು $x + 2y - 1 = 0$ ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಂತಹ ಒಂದು ವೃತ್ತ

$$x^2 + y^2 + 6x + 6y + 8 + \lambda (x^2 + y^2 + 2x - 8y - 5) = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2 \frac{(3 + \lambda)}{1 + \lambda} x + \frac{2(3 - 4\lambda)}{1 + \lambda} y + \frac{9 - 5\lambda}{1 + \lambda} = 0$$

ಇದರ ಕೇಂದ್ರ $\left(-\frac{3 + \lambda}{1 + \lambda}, \ -\frac{3 - 4\lambda}{1 + \lambda}\right)$

ಇದು $x + 2y - 1 = 0$ ಮೇಲೆ ಇದೆ.

$$\therefore -\left(\frac{3 + \lambda}{1 + \lambda}\right) - 2\left(\frac{3 - 4\lambda}{1 + \lambda}\right) - 1 = 0$$

$$\therefore -3 - \lambda - 6 + 8\lambda - 1 - \lambda = 0$$

$$6\lambda = 10$$

$$\lambda = \tfrac{5}{3}$$

$\therefore$ ಬೇಕಾದ ವೃತ್ತ $8(x^2 + y^2) + 28x - 22y + 2 = 0$

$$4(x^2 + y^2) + 14x - 11y + 1 = 0$$

6 $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದು ಚರಬಿಂದುವಿನ ಧ್ರುವೀಯಗಳು $x^2 + y^2 = 9$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ ಚರಬಿಂದುವಿನ ಪಥವೇನು?

$P(x_1, y_1)$ ಅದರ ಒಂದು ಸ್ಥಾನವಾಗಿರಲಿ. ಅದರ ಧ್ರುವೀಯವು $xx_1 + yy_1 - 2(x + x_1) + 3(y + y_1) + 8 = 0$

$$y = -\left(\frac{x_1 - 2}{y_1 + 3}\right) x + \frac{2x_1 - 3y_1 - 8}{y_1 + 3}$$

ಇದು $x^2 + y^2 = 9$ ರ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\left(\frac{2x_1 - 3y_1 - 8}{y_1 + 3}\right)^2 = 9\left[1 + \left(\frac{x_1 - 2}{y_1 + 3}\right)^2\right]$$

$\therefore P(x_1, y_1)$ ರ ಪಥವು

$$(2x - 3y - 8)^2 = 9[(x - 2)^2 + (y + 3)^2]$$

7 $S = 0$ಗೆ P ಬಿಂದುವಿನ ಧ್ರುವೀಯ Q ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗಿದರೆ Q ವಿನ ಧ್ರುವೀಯ P ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

$S = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ಎಂದಿರಲಿ. P ಯ ಧ್ರುವೀಯ $S_1 = 0$. ಇದು Q ಮೂಲಕ ಸಾಗಿದರೆ, $S_{12} = 0$ (1)

Q ವಿನ ಧ್ರುವೀಯ $S_2 = 0$. ಇದು P ಮೂಲಕ ಸಾಗಿದರೆ, $S_{21} = 0$ ಅಥವಾ $S_{12} = 0$ ಆಗಬೇಕು. (1) ರಿಂದ ಇದು ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

P ಮತ್ತು Q ಗಳಂತಹ ಒಂದು ಜೊತೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು $S = 0$ ಗೆ ಅನುವರ್ತಿ ಬಿಂದುಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಂತಹ ಜೊತೆಗಳು ಅಸಂಖ್ಯಾತವಾಗಿವೆ ಯೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

ಇದೇ ರೀತಿ $S = 0$ ಗೆ l ಸರಳರೇಖೆಯ ಧ್ರುವ m ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿದ್ದರೆ, m ನ ಧ್ರುವ l ಮೇಲಿದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು. ಇಂತಹ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು $S = 0$ ಗೆ ಅನುವರ್ತಿ ರೇಖೆಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಂತಹ ಜೊತೆಗಳು ಅಸಂಖ್ಯಾತವಾಗಿವೆಯೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

ಅಭ್ಯಾಸ 4·1

1 ಈ ಕೆಳಗಿನ ವೃತ್ತಗಳೂ ಸರಳರೇಖೆಗಳೂ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ; ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(*a*) $x^2 + y^2 + 3y + 2x = 0$
$3y + 2x = 0$

(*b*) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$
$3x - 4y - 10 = 0$

(*c*) $x^2 + y^2 + 16x - 14y - 56 = 0$
$5x + 2y - 45 = 0$

2 A (3, 4), B (− 3, 5), C (2, − 5) ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3 $4x + 3y - 1 = 0$, $x - y = 0$, $x + y + 1 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ರಚಿಸುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4 $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದ $\sqrt{S_{11}}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

5 ಒಂದು ಚರಬಿಂದುವಿನಿಂದ $x^2 + y^2 + 4x + 7y - 1 = 0$ ಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದವು $x^2 + y^2 - 5x - 6y + 2 = 0$ ಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದದ ಎರಡರಷ್ಟಿದ್ದರೆ ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6 $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c_1 = 0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದ $\sqrt{c_1 - c}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

7 $x^2 + y^2 = a^2$ ಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನೂ $x^2 + y^2 = b^2$ ಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನೂ ಇವು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವಂತೆ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಈ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8 TP. TQ ಗಳು ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು; P, Q ಗಳು ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುಗಳು. AB ವ್ಯಾಸವು PQ ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆ; CD ವ್ಯಾಸವು ಇದಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. AP, AQ ಗಳು CD ಯನ್ನು R, S ಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುವು. RT = ST ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

9 A, B, C ಗಳು ಮೂರು ಸ್ಥಿರಬಿಂದುಗಳು. $PA^2 + PB^2 + PC^2 = K^2$ ಆಗಿರುವಂತೆ P ಚರಬಿಂದು ಚಲಿಸುವುದು. P ಯ ಪಥ ಒಂದು ವೃತ್ತವೆಂದೂ ಅದರ ಕೇಂದ್ರ $\triangle ABC$ ಯ ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರವೆಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ.

10 ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $x^2 + y^2 - ax + 2y + 25 = 0$ ಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ, a ಯ ಬೆಲೆಯೆಷ್ಟು?

11 $a_r x + b_r y + c_r = 0,\ r = 1, 2, 3$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ರಚಿಸುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಪರಿವೃತ್ತ

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a_1^2 + b_1^2}{a_1x + b_1y + c_1} & \dfrac{a_2^2 + b_2^2}{a_2x + b_2y + c_2} & \dfrac{a_3^2 + b_3^2}{a_3x + b_3y + c_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

[ಸೂಚನೆ: ಈ ವೃತ್ತದ ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪ

$$L_1L_2 + \lambda L_2L_3 + \mu L_3L_1 = 0,\ \ L_1 = a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

ಇತ್ಯಾದಿ, ಎಂದಿರಬೇಕು, ಇಲ್ಲಿ λ, μ ಗಳನ್ನು ಯುಕ್ತವಾಗಿ ಆರಿಸಬೇಕು. ಈ ನಿಯಮಗಳು

$$\lambda(a_2a_3 - b_2b_3) + \mu(a_3a_1 - b_3b_1) + a_1a_2 - b_1b_2 = 0$$

$$\lambda(a_2b_3 + b_2a_3) + \mu(a_3b_1 + b_3a_1) + a_1b_2 + b_1a_2 = 0$$

ಅಲ್ಲದೆ,

$$\frac{\lambda}{L_1}+\frac{\mu}{L_2}+\frac{1}{L_3}=0$$

λ, μ ಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿ ಮುಂದುವರಿಸಿ]

12 $a_r x + b_r y + c_r = 0, \ r = 1, \ 2, \ 3, \ 4$

ರಚಿಸುವ ಚತುರ್ಭುಜ ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿದ್ದರೆ,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & ib_4 \\ ib_3 & a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & ib_2 \\ ib_1 & a_2 \end{vmatrix} = 0$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

13 $x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$ ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ θ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಗೊಂಡಂತೆ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಅದರ ಧ್ರುವವು $p^2[(x+g)^2 + (y+f)^2] = (gx + fy + c)^2$ ಎಂಬ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

14 $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ $gx + fy + c = 0$ ಯ ಧ್ರುವ P ಬಿಂದು; $lx + my + n = 0$ ಯ ಧ್ರುವ Q ಬಿಂದು. PQ ವಿನ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಓಟಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15 $S = 0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ P, Q ಗಳು ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿ ಬಿಂದುಗಳು. ಅವುಗಳ ಧ್ರುವೀಯಗಳು R ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುವು. PQ ವು R ನ ಧ್ರುವೀಯವೆಂದೂ R ಬಿಂದು PQ ವಿನ ಧ್ರುವವೆಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ. ($\triangle$PQR ನಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಭುಜವೂ ಅದರ ಎದುರು ಶೃಂಗದ ಧ್ರುವೀಯವೂ ಪ್ರತಿಶೃಂಗವೂ ಅದರ ಎದುರು ಭುಜದ ಧ್ರುವವೂ ಆಗಿದೆ. ಇಂತಹ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಆ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ವಾನುವರ್ತಿ ತ್ರಿಭುಜವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.)

16 $S = 0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ l, m ಗಳು ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳು. ಅವುಗಳ ಧ್ರುವಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆ n ಆಗಿದೆ. n ರೇಖೆಯು l, m ಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಧ್ರುವೀಯವೆಂದೂ, ಆ ಬಿಂದು n ನ ಧ್ರುವವೆಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ (l, m, n ರಚಿಸುವ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಭುಜವೂ ಎದುರು ಶೃಂಗದ ಧ್ರುವೀಯ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಶೃಂಗವೂ ಎದುರು ಭುಜದ ಧ್ರುವ. ಇಂತಹ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು, ಹಿಂದಿನಂತೆ, ಆ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ವಾನುವರ್ತಿ ತ್ರಿಭುಜವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ).

17 11 ನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿನ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವು x–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿದ್ದರೆ,

$$\begin{vmatrix} a_2a_3 - b_2b_3 & a_3a_1 - b_3b_1 & a_1a_2 - b_1b_2 \\ a_3b_2 + a_2b_3 & a_1b_3 + a_3b_1 & a_2b_1 + a_1b_2 \\ b_3c_2 + b_2c_3 & b_1c_3 + b_3c_1 & b_2c_1 + b_1c_2 \end{vmatrix} = 0$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

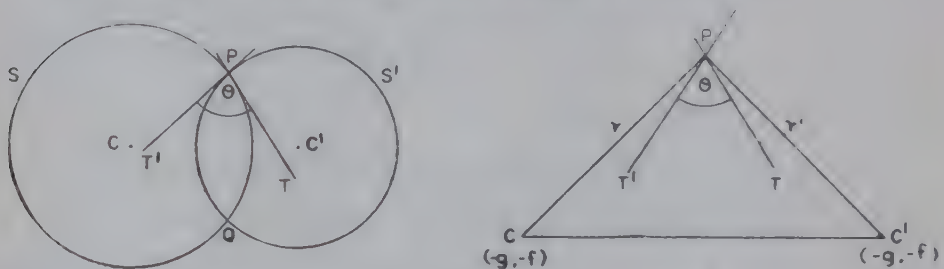
4.6 ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು—

$$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$S \equiv x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$$

ಇವು ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಇವು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

I ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ—ಈ ವೃತ್ತಗಳು P, Q ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. PT, PT′ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ P ಯಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು. ∠TPT′ ನ್ನು ವೃತ್ತಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 4.2

$$\angle TPC' = \angle T'PC' - \angle T'PT = \frac{\pi}{2} - \theta$$

ಅದೇ ರೀತಿ, $\angle T'PC = \frac{\pi}{2} - \theta$

$$\therefore \quad \angle CPC' = \pi - 2\theta + \theta = \pi - \theta$$

$$CC'^2 = CP^2 + C'P^2 - 2CP.C'P.\cos CPC'$$

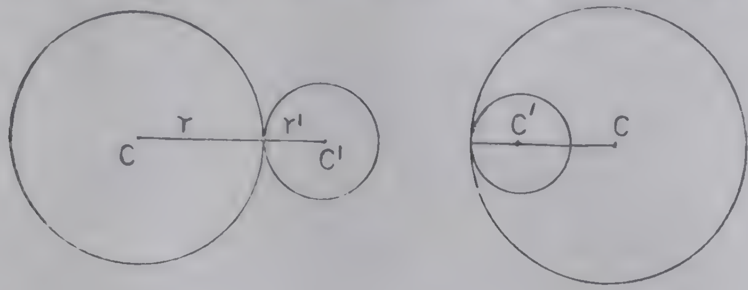
$$g^2 + f^2 + g'^2 + f'^2 - 2gg' - 2ff'$$

$$= g^2 + f^2 - c + g'^2 + f'^2 - c' + 2r.r'.\cos\theta$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{c + c' - 2gg' - 2ff'}{2rr'}, \quad r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

$$r' = \sqrt{g'^2 + f'^2 - c'}$$

II $2rr' < c + c' - 2gg' - 2ff'$ ಆದರೆ θ ವು ವಾಸ್ತವವಾಗಿದೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಗಳು ವಾಸ್ತವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುವು.



ಚಿತ್ರ 4.3

$2rr' = c + c' - 2gg' - 2ff'$ ಆದರೆ, $\theta = 0$. ಈಗ ವೃತ್ತಗಳು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $CC' = r + r'$ ಅಥವಾ, $CC' = r \sim r'$
$2rr' < c + c' - 2gg' - 2ff'$ ಆದರೆ θ ಕ್ಕೆ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಯಿಲ್ಲ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಗಳು ಛೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

III ಇನ್ನೂ ಒಂದು ವಿಶೇಷ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಿದೆ. $\theta = \frac{\pi}{2}$ ಆದರೆ $\cos\theta = 0$. $\therefore\ 2gg' + 2ff' = c + c'$ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಗಳು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವು ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಇನ್ನೊಂದರ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗುವುದು. ಇಂಥ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಒಂದು ಜೊತೆ ಲಂಬವೃತ್ತಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ

(1) $S=0, S'=0$ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು. $\frac{S}{r} \pm \frac{S'}{r'} = 0$ ವೃತ್ತಗಳು (r, r' ಅವುಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು) ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವುವು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$S' \equiv x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0 \text{ ಎಂದಿರಲಿ.}$$

$$r'S \pm rS' = r'(x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c)$$
$$\pm r(x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c') = 0$$

$$\therefore\quad x^2 + y^2 + \frac{2x}{\pm r + r'}(gr' \pm g'r) + \frac{2y}{\pm r + r'}(fr' \pm f'r)$$
$$+ \frac{cr' \pm c'r}{\pm r + r'} = 0$$

ಈ ವೃತ್ತಗಳು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸಲು ಪಾಲಿಸಬೇಕಾದ ನಿಯಮ,

$$\frac{2(g^2r'^2 - g'^2r^2)}{r'^2 - r^2} + \frac{2(f^2r'^2 - f'^2r^2)}{r'^2 - r^2} = \frac{cr + c'r}{r' + r} + \frac{cr' - c'r}{r' - r}$$

ಅಂದರೆ, $2[(g^2 + f^2)r'^2 - (g'^2 + f'^2)r^2] = (cr' + c'r)(r' - r)$
$+ (cr' - c'r)(r' + r) = 2cr'^2 - 2c'r^2$

ಅಂದರೆ, $(g^2 + f^2 - c)r'^2 - (g'^2 + f'^2 - c')r^2 = 0$

ಅಂದರೆ, $r^2r'^2 - r'^2r^2 = 0$ ಇದು ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ

(2) $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ ಮತ್ತು
$x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$

ಇವುಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಆ ವೃತ್ತ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ಎಂದಿರಲಿ. ಇದು ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನೂ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವುದರಿಂದ,

$$2gg_1 + 2ff_1 - c - c_1 = 0$$
$$2gg_2 + 2ff_2 - c - c_2 = 0, \qquad \text{ಅಲ್ಲದೆ}$$
$$2gx + 2fy + c + x^2 + y^2 = 0$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ $2g$, $2f$ ಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ,

$$\begin{vmatrix} g_1 & f_1 & -c - c_1 \\ g_2 & f_2 & -c - c_2 \\ x & y & c + x^2 + y^2 \end{vmatrix} = 0$$

ಅಥವಾ, $$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y \\ -c_1 & g_1 & f_1 \\ -c_2 & g_2 & f_2 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ -1 & g_1 & f_1 \\ -1 & g_2 & f_2 \end{vmatrix} = 0$$

ಇಲ್ಲಿ c ಗೆ ಯಾವ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಬೇಕಾದರೂ ಕೊಡಬಹುದು.

4·7 ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ—$S = 0$ ವೃತ್ತದ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ P ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. C ಯು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ, r ತ್ರಿಜ್ಯ ವಾದರೆ, $CP^2 - r^2$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $S = 0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ P ಯ ಶಕ್ತಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. P ಯು ವೃತ್ತದ

$$\left.\begin{array}{l}\text{ಒಳಗೆ}\\ \text{ಮೇಲೆ}\\ \text{ಹೊರಗೆ}\end{array}\right\}\ \text{ಇದ್ದರೆ } CP^2 - r^2 \lesseqgtr 0$$

P ಯು (x_1, y_1) ಆಗಿದ್ದರೆ, $CP^2 - r^2 = S_{11}$

ಅಲ್ಲದೆ P ಯು ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿರುವಾಗ, $CP^2 - r^2 = PT^2$, PTಯು P ಯಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕ. $\therefore\ PT = \sqrt{S_{11}}$

$S = 0$. $S' = 0$ ಎನ್ನುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಈ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ $P(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವಿನ ಶಕ್ತಿಗಳು S_{11} ಮತ್ತು S'_{11}. ಇವು ಸಮಾನವಾಗಿದ್ದರೆ, $S_{11} = S'_{11}$

ಅಂದರೆ, $2(g - g')x_1 + 2(f - f')y_1 + c - c' = 0$

$\therefore$ P ಯ ಪಥ (ಈ ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ)

$2(g - g')x + 2(f - f')y + c - c' = 0$

ಇದೊಂದು ಸರಳರೇಖೆ. ಇದರ ಓಟ $= -\left(\dfrac{g - g'}{f - f'}\right)$.

ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರಗಳ ಜೋಡಣೆಯ ಓಟ $= \dfrac{f - f'}{g - g'}$

ಈ ಎರಡೂ ಓಟಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ -1 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ P ಯ ಪಥ ಕೇಂದ್ರರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ.

P ಯ ಪಥವನ್ನು ದತ್ತವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅದರ ಗುಣಗಳು ಹೀಗಿವೆ—

(1) ಮೂಲಾಕ್ಷವು ಕೇಂದ್ರರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆ.

(2) ಮೂಲಾಕ್ಷದ ರೂಪ $S - S' = 0$. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ವೃತ್ತಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಸರಳರೇಖೆ. ವೃತ್ತಗಳು ಛೇದಿಸಿದರೆ (ಅಥವಾ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ) ಮೂಲಾಕ್ಷವು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾ (ಅಥವಾ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕ); ಛೇದಿಸದೇ ಇದ್ದರೆ ಮೂಲಾಕ್ಷವು ವಾಸ್ತವವಾಗಿಯೇ ಇರುವುದು. ಆದರೆ ಯಾವ ವೃತ್ತವನ್ನೂ ಇದು ಛೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲ ಅಥವಾ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

(3) ಮೂಲಾಕ್ಷದ ಮೇಲಿ ವೃತ್ತಗಳ ಹೊರಗಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ($S_{11} = S'_{11}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ) ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವು. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂಲಾಕ್ಷದ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: "ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ

ಸಮಾನಶಕ್ತಿಗಳಿರುವಂತೆ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ ಆ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ." ಇದರ ವಿಶೇಷ ವಾಕ್ಯ: "ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವಂತೆ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ ಆ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ."

(4) ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಎಲ್ಲ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನೂ ಮೂಲಾಕ್ಷವು ಸಮದ್ವಿಭಾಗಿಸುವುದು.

(5) ಏಕರೇಖಸ್ಥ ಕೇಂದ್ರಗಳಿಲ್ಲದಿರುವ ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದು ಸಲ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳಂತೆ ಆರಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಅವುಗಳಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಮೂರು ಮೂಲಾಕ್ಷಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗುವುವು. ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು ಆ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$S = 0$, $S' = 0$, $S'' = 0$ ಆ ವೃತ್ತಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ, $L_1 \equiv S - S' = 0$, $L_2 \equiv S' - S'' = 0$, $L_3 \equiv S'' - S = 0$. $L_1 + L_2 + L_3 = 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಮೂಲಾಕ್ಷಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗಿವೆ. ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಮೂಲಾಕ್ಷಗಳ ಛೇದನಬಿಂದು ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರ.

(6) ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಬಿಂದು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ, ಇಂತಹ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಿದ ವೃತ್ತ ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳನ್ನೂ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವುದು.

(7) ಒಂದು ವೃತ್ತವು ಇನ್ನೊಂದು ವೃತ್ತ ಪರಿಧಿಯನ್ನು ಸಮದ್ವಿಭಾಗಿಸಿದರೆ ಅವುಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವು ಎರಡನೆಯದರ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದು.

4.8 ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಸರಳರೂಪ—

$$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$S' \equiv x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$$

ಎರಡು ಸಾಮಾನ್ಯ ವೃತ್ತಗಳಾಗಿರಲಿ. $L \equiv S - S' = 0$ ಅವುಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವಾಗಿರಲಿ. CC' ಕೇಂದ್ರರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ. CC' ನ್ನು $L = 0$ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವುದೆಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಛೇದನ ಬಿಂದು N ಎಂದಿರಲಿ.

ಮೊದಲು CC' ಕೇಂದ್ರರೇಖೆಯನ್ನು x–ಅಕ್ಷವೆಂದು ಆರಿಸೋಣ. ಆಗ $-f = -f' = 0$.

ಆಮೇಲೆ, N ನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದು, ಮೂಲಾಕ್ಷವನ್ನು y–ಅಕ್ಷವೆಂದು ಆರಿಸೋಣ.

ಆಗ $S = 0$ ಗೆ N ನ ಶಕ್ತಿ $= c$; $S' = 0$ ಗೆ N ನ ಶಕ್ತಿ $= c'$. N ಬಿಂದು ಮೂಲಾಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ, ಈ ಶಕ್ತಿಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾನವಾಗಿರಬೇಕು. $\therefore c = c'$

$\therefore$ N ಮೂಲಬಿಂದುವಾಗಿ, CC' x–ಅಕ್ಷವಾಗಿ ಇರುವಾಗ ಈ ವೃತ್ತಗಳ ರೂಪ

$$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + c = 0$$

$$S' \equiv x^2 + y^2 + 2g'x + c = 0$$

ಇಲ್ಲಿ g ಮಾತ್ರ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳ್ಳುವುದು.

4.9 ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆ—ಮೇಲಿನ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ :

$$C_r \equiv x^2 + y^2 + 2g_r x + c = 0, \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

ಎನ್ನುವ ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ g ಮಾತ್ರ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳ್ಳುವುದು. ಈ ವೃತ್ತಗಳ ಗುಣಗಳು—

(1) ಕೇಂದ್ರಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿವೆ (x–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ).

(2) ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿದೆ (y–ಅಕ್ಷ).

ಇಂತಹ ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆ (System of Coaxal Circles) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಂತಹ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಸುಲಭ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $x^2 + y^2 + 2\lambda x + c = 0$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ c ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ. λ ವು ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಂಡಂತೆ ನಮಗೆ ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಎಲ್ಲ ವೃತ್ತಗಳೂ ದೊರೆಯುವುವು.

$S_\lambda \equiv x^2 + y^2 + 2\lambda x + c = 0$ ಎನ್ನುವ ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

I ಇದರ ಕೇಂದ್ರ $(-\lambda, 0)$, ತ್ರಿಜ್ಯ $\sqrt{\lambda^2 - c}$

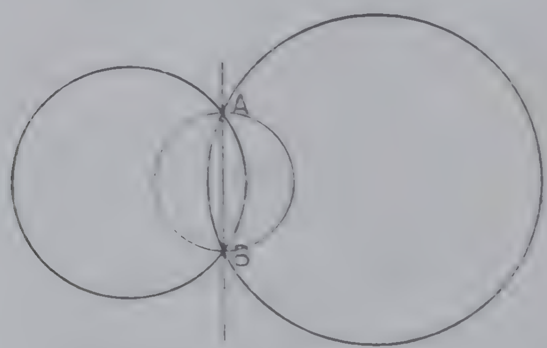
(1) $\lambda^2 < c$ ಆಗಿರುವಂತಹ λ ದ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ $S_\lambda = 0$ ಊಹಾಜನ್ಯವಾಗಿರುವುದು.

(2) $\lambda^2 = c$ ಆಗಿರುವಾಗ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಶೂನ್ಯವಾಗುವುದು. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $S_\lambda = 0$, $(\pm\sqrt{c}, 0)$ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುವೃತ್ತಗಳನ್ನು ನೀಡುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಬಿಂದುವೃತ್ತಗಳು $S_\lambda = 0$ ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ವಿಕೃತ ರೂಪಗಳು. $(c > 0)$

(3) $\lambda^2 < c$ ಆಗಿರುವಾಗ, λದ ವಿವಿಧ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ವಿವಿಧ ವೃತ್ತಗಳು ಲಭಿಸುವುವು.

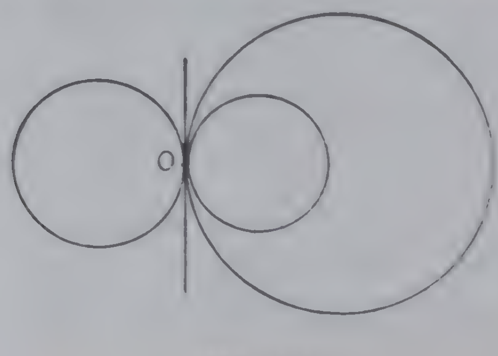
II ಇನ್ನು ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಮತ್ತು ಇದರ ಮೂಲಾಕ್ಷದ ಛೇದನವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಅವುಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ, $y^2 + c = 0$ ದೊರೆಯುವುದು.

$$y = \pm\sqrt{-c}$$



ಚಿತ್ರ 4·4

(1) $c < 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಮೂಲಾಕ್ಷವನ್ನು $(0, \pm\sqrt{-c})$ ಎನ್ನುವ ಎರಡು ವಾಸ್ತವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು. ಇವುಗಳನ್ನು A, B



ಚಿತ್ರ 4.5

ಎಂದು ಕರೆದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವೃತ್ತವೂ A, B ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದು. ಇಲ್ಲಿ AB (ಮೂಲಾಕ್ಷವು) ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯಜ್ಯಾ ಆಗಿದೆ. ಇಂತಹ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಛೇದಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(2) $c = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಮೂಲಾಕ್ಷವನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದು. ಮೂಲಾಕ್ಷ ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗುವುದು. ಇಂತಹ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(3) $c > 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಮೂಲಾಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಇಂತಹ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಛೇದಿಸದ ಅಥವಾ ಅಛೇದಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

III $\lambda^2 > c$, $c > 0$ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. $S_\lambda = 0$ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಛೇದಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಇದರಲ್ಲಿ



ಚಿತ್ರ 4.6

$(\pm\sqrt{c}, 0)$ ಗಳಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದು ವೃತ್ತಗಳೂ ಸೇರಿವೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು L, L′ ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ. $S_\lambda = 0$ ಇದರ ಕೇಂದ್ರ $(-\lambda, 0)$, ತ್ರಿಜ್ಯ $\sqrt{\lambda^2 - c}$. ಆದ್ದರಿಂದ λ ದ ನಿಜಬೆಲೆ ಏರಿದಂತೆ ಅಂದರೆ ಕೇಂದ್ರವು O ನಿಂದ ಎಡಕ್ಕೆ ಅಥವಾ ಬಲಕ್ಕೆ ದೂರ ದೂರ ಸರಿದಂತೆ $\sqrt{\lambda^2 - c}$ ಯ ಬೆಲೆ ಏರುತ್ತ ಹೋಗುವುದು, ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ ವೃತ್ತದ ಗಾತ್ರ ದೊಡ್ಡದಾಗುತ್ತ ಹೋಗುವುದು. ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿನ ಯಾವ ವೃತ್ತಗಳೂ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದೂ ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು A, B ಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ, AB ಯು ಅವುಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವಾಗುವುದು. ಇದು ದತ್ತ ನಿಯಮಕ್ಕೆ ವಿರೋಧವಾಗಿದೆ.

(1) $|\lambda| = 0$ ಎಂದಿರಲಿ. ತ್ರಿಜ್ಯ $= \sqrt{-c}$. ಈ ವೃತ್ತ ಊಹಾಜನ್ಯವಾಗಿದೆ.

(2) $|\lambda| < OL$. ತ್ರಿಜ್ಯ $= \sqrt{\lambda^2 - c} = \sqrt{\lambda^2 - OL^2}$. ಈ ವೃತ್ತವೂ ಊಹಾಜನ್ಯವಾಗಿದೆ.

(3) $|\lambda| = OL$. L, L′ನಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದು ವೃತ್ತಗಳು ದೊರೆಯುವುವು.

(4) $|\lambda| > OL$. ತ್ರಿಜ್ಯ $= \sqrt{\lambda^2 - c} = \sqrt{\lambda^2 - OL^2}$. ಈ ವೃತ್ತ ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, L′L ವಲಯದಲ್ಲಿ ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಯಾವ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಕೇಂದ್ರಗಳು L ಮತ್ತು L ನಿಂದ ಬಲಗಡೆಗೂ, L′ ಮತ್ತು L′ ನಿಂದ ಎಡಗಡೆಗೂ ಸೀಮಿತವಾಗಿವೆ.

ಅಥವಾ, ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಕೇಂದ್ರಗಳು x–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಬಲಗಡೆಯಿಂದ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನೆಡೆಗೆ ಬರುತ್ತಿದ್ದಂತೆ L ನಲ್ಲಿ ನಿಲ್ಲಬೇಕಾಗುವುದು; ಇದೇ ರೀತಿ ಎಡಗಡೆಯಿಂದ ಬರುತ್ತಿದ್ದಂತೆ L′ ನಲ್ಲಿ ನಿಲ್ಲಬೇಕಾಗುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ, L′, L ಗಳನ್ನು ಅಭೇದಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಪರಮಾವಧಿ ಬಿಂದುಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇವು ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಕನಿಷ್ಠ ವೃತ್ತಗಳು. ಸ್ಪರ್ಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಪರಮಾವಧಿ ಬಿಂದುಗಳು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಿಸುವುವು. ಭೇದಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಇವು ಊಹಾಜನ್ಯ.

4.10 ಲಂಬ ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆ—

$S_\lambda \equiv x^2 + y^2 + 2\lambda x + c = 0$ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವೃತ್ತವನ್ನೂ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + k = 0$ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಆಗ,

$2g\lambda + 2f(0) = c + k$, ಇದು λ ದ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಸತ್ಯವಾಗಬೇಕು.

$$\therefore g = 0, c + k = 0$$

$\therefore$ ಹೊಸ ವೃತ್ತವು $x^2 + y^2 + 2fy - c = 0$ ಆಗುವುದು. ಇಲ್ಲಿ f ನ ಮೇಲೆ ಯಾವ ನಿಯಮವೂ ಇಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ ಇದೊಂದು ಹೊಸ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು (f ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಂಡಂತೆ) ಸೂಚಿಸುವುದೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆ

$S_\mu \equiv x^2 + y^2 + 2\mu y - c = 0$ ಎಂದಿರಲಿ. ಇದೂ ಒಂದು ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷವ್ಯವಸ್ಥೆ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯುವುದು. ಇದರ ಮೂಲಾಕ್ಷ x–ಅಕ್ಷವಾಗಿರುವುದು; ಕೇಂದ್ರ ರೇಖೆ y–ಅಕ್ಷ.

(1) $S_\mu = 0$, $S_\lambda = 0$ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿವೆ. ಒಂದರ ಕೇಂದ್ರ ರೇಖೆ ಇನ್ನೊಂದರ ಮೂಲಾಕ್ಷ.

(2) $c > 0$ ಆಗಿರುವಾಗ $S_\lambda = 0$ ಅಭೇದಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆ; $S_\mu = 0$ ಭೇದಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ L, L′ ಗಳ ಮೂಲಕ $S_\mu = 0$ ಸಾಗುವುದೆಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಾಳೆನೋಡಬಹುದು. L′L ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಪರಮಾವಧಿ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವೃತ್ತವೂ ಆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಭೇದಿಸುವುದು.

(3) $c = 0$ ಆಗಿರುವಾಗ $S_\lambda = 0$ ದಂತೆಯೇ $S_\mu = 0$ ಸಹ ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಾಗುವುದು.

(4) $c < 0$ ಆಗಿರುವಾಗ $S_\lambda = 0$ A, B$(0, \pm\sqrt{-c})$ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದೆಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಇವು ಈಗ $S_\mu = 0$ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಪರಮಾವಧಿ ಬಿಂದುಗಳಾಗುವುವು; $S_\mu = 0$ ಅಭೇದಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ

(1)
$$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$
$$S' \equiv x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$$

ಎನ್ನುವ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. $S + \lambda S' = 0$, λ ದ ಎಲ್ಲ ಸ್ಥಿರ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ದತ್ತವೃತ್ತಗಳ ಭೇದನ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ $S + \lambda S' = 0$ ದತ್ತವೃತ್ತಗಳು ನಿರ್ಧರಿಸುವ ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯಸಮೀಕರಣ. ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಪರಮಾವಧಿ ಬಿಂದುಗಳು—

$$\left(\frac{g + \lambda g'}{1 + \lambda}\right)^2 + \left(\frac{f + \lambda f'}{1 + \lambda}\right)^2 - \left(\frac{c + \lambda c'}{1 + \lambda}\right) = 0$$

$$r'^2 \lambda^2 + (2gg' + 2ff' - c - c')\lambda + r^2 = 0$$

(r, r' ಆ ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು). ವೃತ್ತಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ θ ಎಂದಿದ್ದರೆ, (ಪರಿಚ್ಛೇದ 4.6)

$$2rr' \cos\theta = c + c' - 2gg' - 2ff'$$

$$\therefore\ r'^2\lambda^2 - 2rr'\cos\theta\,\lambda + r^2 = 0$$

$$\therefore\ \lambda = \frac{rr'\cos\theta \pm \sqrt{r^2r'^2(\cos^2\theta - 1)}}{r'^2}$$

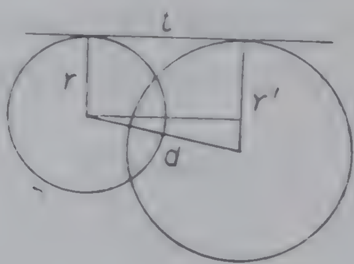
$$= \frac{r}{r'}\,e^{\pm i\theta}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಪರಮಾವಧಿ ಬಿಂದುಗಳು

$S + \frac{r}{r'} e^{\pm i\theta}\ S' = 0$ ಅಥವಾ

$r'S + r\,e^{\pm i\theta}\,S' = 0$

(2) ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ θ. ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದ t ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಉದ್ದ r, r' ಎಂದಿದ್ದರೆ, $t^2 = 2rr'(1 + \cos\theta)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 4.7

$$t^2 = d^2 - (r - r')^2 = g^2 + g'^2 - 2gg' + f^2 + f'^2 - 2ff' - g^2 - f^2 + c - g'^2 - f'^2 + c' + 2rr'$$

$$= 2rr' - 2gg' - 2ff' + c + c' = 2rr' + 2rr'\cos\theta$$

$$= 2rr'(1 + \cos\theta)$$

ವೃತ್ತಗಳು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ, $t^2 = 2rr'$

ಈ ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸ್ಥಿರವೃತ್ತವಾಗಿದ್ದು, θ ಸ್ಥಿರ ಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ,

$$t^2 = 2rr'(1 + \cos\theta)$$

$$= 2r'(1 + \cos\theta)\ .\ r = \lambda r$$

ಒಂದು ದತ್ತವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಥಿರ ಕೋನದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಈ ಸಮೀಕರಣ ನೀಡುವುದು.

(3) $C=0$ ವೃತ್ತ $S=0$, $S'=0$ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು θ, θ' ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ $C=0$ ಯು $Sr'\cos\theta' - S'r\cos\theta = 0$ ಯನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ (r, r' ಆಯಾ ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು).

$C=0$ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವೆಂದೂ ಇದರ ಮತ್ತು $S=0$ ಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು x–ಅಕ್ಷವೆಂದೂ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.

$\therefore C \equiv x^2+y^2-a^2=0$

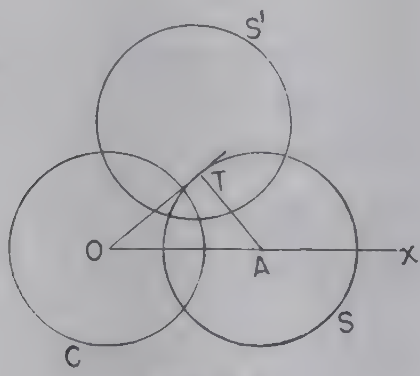
$S \equiv x^2+y^2+2\lambda x+c=0$, ತ್ರಿಜ್ಯ $\sqrt{\lambda^2-c}=r$

$S' \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+k=0$, ತ್ರಿಜ್ಯ $\sqrt{g^2+f^2-k}=r'$

$OA^2 = a^2+r^2+2ar\cos\theta$

$\qquad = OT^2+r^2 = c+r^2$

$\therefore 2ar\cos\theta = c-a^2$



ಚಿತ್ರ 4.8

ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ, $2ar'\cos\theta' = k-a^2$. $C=0$ ಯು $S+\mu S'=0$ ನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸಲಿ.

$$S+\mu S' \equiv x^2+y^2+2\lambda x+c+\mu[x^2+y^2+2gx+2fy+k]=0$$

$$\therefore x^2+y^2+\frac{2(\lambda+\mu g)}{1+\mu}x+\frac{2f\mu}{1+\mu}y+\frac{c+\mu k}{1+\mu}=0$$

$$\therefore \text{ಬೇಕಾದ ನಿಯಮ,}\ -a^2+\frac{c+\mu k}{1+\mu}=0$$

$$\therefore \mu = \frac{a^2-c}{k-a^2} = \frac{-2ar\cos\theta}{2ar'\cos\theta'}$$

$\therefore$ ಬೇಕಾದ ವೃತ್ತವು $Sr' \cos\theta' - S'r \cos\theta = 0$

(4) ಒಂದು ದತ್ತ ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ ಒಂದು ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನ ಧ್ರುವೀಯಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗಿವೆ.

ಆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು $x^2 + y^2 + 2\lambda x + c = 0$ ಎಂದೂ ದತ್ತ ಬಿಂದುವು $P(x_1, y_1)$ ಎಂದೂ ಇರಲಿ. P ಯ ಧ್ರುವೀಯವು

$$xx_1 + yy_1 + \lambda(x + x_1) + c = 0$$

ಅಥವಾ, $(xx_1 + yy_1 + c) + \lambda(x+x_1) = 0 \quad (1)$

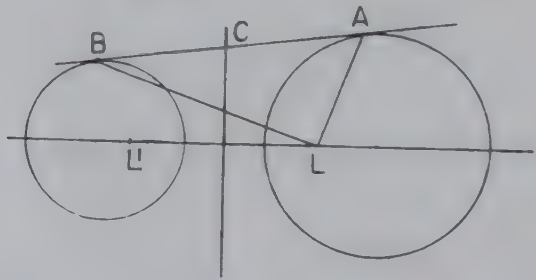
λ ಬದಲಾದಂತೆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ವಿವಿಧ ವೃತ್ತಗಳು ದೊರೆಯುವುವು. ಆಗ (1) ಸಮೀಕರಣವು

$$\left.\begin{aligned} xx_1 + yy_1 + c &= 0 \\ x + x_1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ಎಂಬ ಎರಡು ಸ್ಥಿರ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಈ ಸ್ಥಿರಬಿಂದು $\left[-x_1, \dfrac{x_1^2 - c}{y_1}\right]$ ಆಗಿದೆ.

ಇದನ್ನು Q ಎಂದು ಕರೆದರೆ PQ ವಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಮೂಲಾಕ್ಷದ ಮೇಲಿದೆಯೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. PQ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಸವಾಗಿ ರಚಿಸಿದ ವೃತ್ತ L, L′ ಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದೆಂಬುದೂ ಸ್ಪಷ್ಟ.

(5) ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುಗಳೂ, ಪರಮಾವಧಿ ಬಿಂದುಗಳೂ ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿವೆ.



ಚಿತ್ರ 4.9

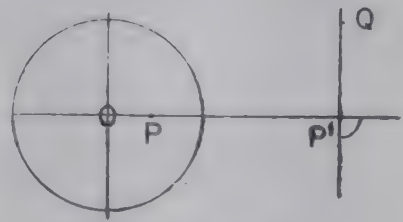
ಸಾಮಾನ್ಯಸ್ಪರ್ಶಕ AB ಯು ಮೂಲಾಕ್ಷವನ್ನು C ಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಿದರೆ, CB = CA. ಆದರೆ, CL = CA = CB.

$\therefore \angle ALB = \frac{\pi}{2}$. ಇದೇ ರೀತಿ $\angle AL'B = \frac{\pi}{2}$.

$\therefore$ A, L, L′, B ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿವೆ.

(6) P, Q ಗಳು $S = 0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿ ಬಿಂದುಗಳು. PQ ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತವು $S = 0$ ಯನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

$S \equiv x^2 + y^2 - a^2 = 0$ ಎಂದಿರಲಿ. OP ಯನ್ನು x–ಅಕ್ಷವೆಂದು ಆರಿಸೋಣ. P ಯ ಧ್ರುವೀಯವು $xx_1 - a^2 = 0$. ಇದು y–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $\frac{a^2}{x_1}$ ದೂರದಲ್ಲಿ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳ ರೇಖೆ. ಇದು OP ಯನ್ನು P′ ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಿದರೆ, $OP' = \frac{a^2}{x_1} = \frac{a^2}{OP}$. $\therefore\ OP.OP' = a^2$



ಚಿತ್ರ 4.10

P, P′ ಗಳನ್ನು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಬಿಂದುಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಧ್ರುವೀಯವು, ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಪ್ರತಿಲೋಮಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಪ್ರಕಾರ Q ಬಿಂದು ಈ ಧ್ರುವೀಯದ ಮೇಲಿದೆ. PQ ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತ P′ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದು.

ಈಗ, $OP.OP' = a^2$ ಆದರೆ ಇದು O ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಈ ವೃತ್ತಕ್ಕೆಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ವರ್ಗ. $\therefore$ ಈ ವೃತ್ತಗಳು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವುವು.

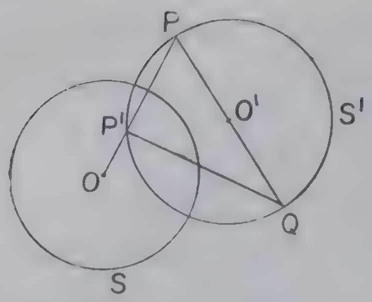
(7) ಸಹ ಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೂ ಪರಮಾವಧಿ ಬಿಂದುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ.

$x^2 + y^2 + 2\lambda x + c = 0$ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಪರಮಾವಧಿ ಬಿಂದುಗಳು L, L′ ಎಂದಿರಲಿ. ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ C ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ $L \equiv (\sqrt{c},\ 0)$, $L' = (-\sqrt{c}, 0)$, $C = (-\lambda, 0)$, ತ್ರಿಜ್ಯ $= \sqrt{\lambda^2 - c}$ ಆಗಿವೆ.

$$\therefore\ CL\ .\ CL' = (-\lambda - \sqrt{c})(-\lambda + \sqrt{c}) = \lambda^2 - c = (\text{ತ್ರಿಜ್ಯ})^2$$

(8) ಮೂರು ದತ್ತವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$S=0$ ವೃತ್ತವನ್ನು $S' = 0$ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸಲಿ. OP ಎನ್ನುವ ಒಂದು ಛೇದಕವು $S' = 0$ ಯನ್ನು ಪುನಃ P′ ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಆಗ



ಚಿತ್ರ 4.11

$OP.OP' = a^2$, ($S = 0$, ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ಗ). $\therefore$ P′ ಬಿಂದು $S = 0$ಗೆ Pಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ. $\therefore$ Pಯ ಧ್ರುವೀಯ OPಗೆ P′ನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬ. ಅದು $S' = 0$ ಯನ್ನು Pಯ ವ್ಯಾಸೀಯ ವಿರೋಧ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸಿದಾಗ, ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಇನ್ನೊಂದರ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಧ್ರುವೀಯವು ಆ ಬಿಂದುವಿನ ವ್ಯಾಸೀಯ ವಿರೋಧ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದು. ಈ ಗುಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಪ್ರಸಕ್ತ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುತ್ತೇವೆ.

ದತ್ತವೃತ್ತಗಳು,
$$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$
$$S' \equiv x + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$$
$$S'' \equiv x^2 + y^2 + 2g''x + 2f''y + c'' = 0$$

ಎಂದಿರಲಿ. $P(x_1, y_1)$ ಇವು ಮೂರನ್ನೂ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಈ ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ Pಯ ಧ್ರುವೀಯಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗಬೇಕು.

$$\therefore\ xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$$

ಅಥವಾ $x(x_1 + g) + y(y_1 + f) + gx_1 + fy_1 + c = 0$

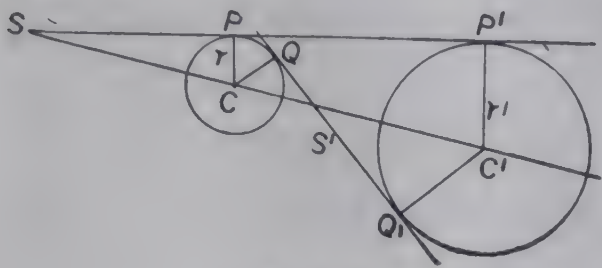
ಇತ್ಯಾದಿ, ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗಬೇಕು. ಇದರ ನಿಯಮ ಈ ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ x, y ಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿ ದೊರೆಯುವ ನಿರ್ಧಾರಕ. $\therefore$ Pಯ ಪಥವು

$$\begin{vmatrix} x+g & y+f & gx+fy+c \\ x+g' & y+f' & g'x+f'y+c' \\ x+g'' & y+f'' & g''x+f''y+c'' \end{vmatrix} = 0$$

ಅಥವಾ,
$$\begin{vmatrix} x+g & y+f & r \\ x+g' & y+f' & r' \\ x+g'' & y+f'' & r'' \end{vmatrix} = 0$$

(9) ಎರಡು ದತ್ತ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವ ಕ್ರಮ.

ಎರಡು ವಿಧದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಒಂದು ಜೊತೆಯನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಎಳೆಯಬಹುದು. ಚಿತ್ರದಿಂದ ತಿಳಿಯುವಂತೆ,



ಚಿತ್ರ 4.12

$$\frac{SC}{SC'} = \frac{r}{r'}, \quad \frac{CS'}{S'C'} = \frac{r}{r'}$$

S, S′ ಬಿಂದುಗಳು CC′ ಎನ್ನುವ ಕೇಂದ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಹೊರಗೂ ಒಳಗೂ ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವುವು. ಆದ್ದರಿಂದ S, S′ ಸ್ಥಿರಬಿಂದುಗಳು. ಇವುಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಬೇಕಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು. S, S′ ಗಳನ್ನು ದತ್ತ ವೃತ್ತಗಳ ಸಾದೃಶ್ಯ ಕೇಂದ್ರಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ದತ್ತ ವೃತ್ತಗಳು $C \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0$

$$C' \equiv x^2 + y^2 - 2cx + c^2 - r'^2 = 0$$

ಎಂದಿರಲಿ. ಇವುಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳು $C(0, 0)$, ಮತ್ತು $C'(c, 0)$ ಆಗಿವೆ. ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು r, r' ಆಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಾದೃಶ್ಯ ಕೇಂದ್ರಗಳು

$$S'\left(\frac{rc}{r+r'}, 0\right), \quad S\left(\frac{rc}{r-r'}, 0\right)$$ ಆಗಿವೆ.

$SS_{11} = S_1^2$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿ ದತ್ತ ವೃತ್ತಗಳ ಎರಡು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನೂ ಬರೆಯಬಹುದು. ಸೂತ್ರ (4.8)

ಈಗ SS′ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಸವಾಗಿ ಎಳೆದ ವೃತ್ತವು

$$\left(x - \frac{rc}{r+r'}\right)\left(x - \frac{rc}{r-r'}\right) + y^2 = 0$$ ಆಗಿದೆ.

$$\Sigma \equiv x^2 + y^2 - \frac{2r^2c}{r^2 - r'^2}x + \frac{r^2c^2}{r^2 - r'^2} = 0$$

ಈಗ $C = 0$, $C' = 0$ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವು

$$C - C' \equiv 2cx - r^2 - c^2 + r'^2 = 0$$

$C = 0$, $\Sigma = 0$ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವು

$C - \Sigma \equiv 2cx - r^2 - c^2 + r'^2 = 0$

$\therefore$ C, C′ ಮತ್ತು Σ, ಒಂದು ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತಗಳು.

ಅಭ್ಯಾಸ 4.2

1 $x^2 + y^2 - x + 3y + 3 = 0$
$x^2 + y^2 + 8x - 6y - 3 = 0$

ಇವು ರಚಿಸುವ ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಅದರ ಪರಮಾವಧಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2 $x^2 + y^2 + 2x + 17y + 4 = 0$
$x^2 + y^2 + 7x + 6y + 11 = 0$
$x^2 + y^2 - x + 22y + 3 = 0$

ಇವುಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3 $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$
$2x^2 + 2y^2 + 6x + 8y - 3 = 0$
$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$

ಇವುಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 7 = 0$ ಇದನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರವು (3. 4) ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5 $x^2 + y^2 = 9$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ (3. 4) ಬಿಂದುವಿನ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ; ಮತ್ತು (3. 4) ರ ಧ್ರುವೀಯವು ಈ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದೆಂದು ತಾಳೆ ನೋಡಿರಿ.

6 $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ A (3, 2) ಮತ್ತು B (3, − 6) ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿ ಬಿಂದುಗಳು. A, B ಗಳು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ರಚಿಸುವ ABC ಎನ್ನುವ ಸ್ವಾನುವರ್ತಿತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಸೂಚನೆ: A, B ಬಿಂದುಗಳ ಧ್ರುವೀಯಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು C). $\triangle$ABC ಯ ಪರಿವೃತ್ತ ದತ್ತ ವೃತ್ತವನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

7 $x^2 + y^2 + 2\lambda x + 2\mu y + \nu = 0$. λ, μ, ν ಗಳ ವಿವಿಧ ಸ್ಥಿರ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಇದು ಒಂದು ವೃತ್ತ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು

ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವಿರುವುದಾದರೆ, $A\lambda + B\mu + C\nu + D = 0$ (A, B, C, D ಗಳು ಸ್ಥಿರಗುಣಕಗಳು) ಈ ನಿಯಮವು ತಾಳೆಯಾಗುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

8 $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$

$$x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2g_3x + 2f_3y + c_3 = 0$$

ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ -c_1 & g_1 & f_1 & -1 \\ -c_2 & g_2 & f_2 & -1 \\ -c_3 & g_3 & f_3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

9 $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$$x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$$

ವೃತ್ತಗಳು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದಾದರೆ,

$$(2gg' + 2ff' - c - c')^2 = 4(g^2 + f^2 - c)(g'^2 + f'^2 - c')$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

10 $x^2 + y^2 + 2\lambda x + c = 0$

$$x^2 - y^2 + 2\mu y - c = 0$$

ವೃತ್ತಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದ $2\sqrt{\frac{(\lambda^2 - c)(\mu^2 + c)}{\lambda^2 + \mu^2}}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

11 $(a, b), (c, d)$ ಗಳು ಪರಮಾವಧಿ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರುವ ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಸಮೀಕರಣ

$$(x^2 + y^2 + 2gx + 2fy)(1 + \lambda) + 2ga + 2fb + a^2 + b^2 + \lambda(2gc + 2fd + c^2 + d^2) = 0$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

12 $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ಒಂದು ವೃತ್ತವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಒಂದು ಪರಮಾವಧಿ ಬಿಂದು ಮೂಲ ಬಿಂದುವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಲಂಬ ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$(x^2 + y^2)(g + \mu f) + c(x + \mu y) = 0$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

13 ಒಂದು ವೃತ್ತವು ಒಂದು ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ ಅದು ಆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಎಲ್ಲ ವೃತ್ತಗಳನ್ನೂ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

14 $(x-1)^2+(y-2)^2+\lambda(x^2+y^2+2x+5)=0$ ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಪರಮಾವಧಿ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು $(1, 2)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ. ಇನ್ನೊಂದು ಪರಮಾವಧಿ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=2c^2$ ವೃತ್ತವು $ax+by+c=0$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ರಚಿಸುವ ರೇಖಾಂತರದ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಸವಾಗಿ ರಚಿಸಿದ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು $(a^2+b^2)(x^2+y^2)+2cax+2cby=0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

16. $x^2+y^2+2\lambda x+c=0$ ಇದೊಂದು ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆ. ಇಲ್ಲಿ λ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳ್ಳುವುದು, c ಯು ಸ್ಥಿರವಾಗಿದೆ. ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ $y=a$ ಎನ್ನುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಧ್ರುವದ ಪಥ ಸಮೀಕರಣವು $x^2=ay+c$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

17 ಮೇಲಿನ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ $lx+my+n=0$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಧ್ರುವಗಳ ಪಥವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18 $S=0, S'=0$ ವೃತ್ತಗಳು θ ಕೋನದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುವು. $S+\lambda S'=0$ ಇವು ರಚಿಸುವ ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆ. ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಕನಿಷ್ಠ ವೃತ್ತ ದೊರೆಯಲು λ ದ ಬೆಲೆಯು $\dfrac{r(r+r'\cos\theta)}{r'(r'+r\cos\theta)}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

19 ಒಂದು ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳು A, B, C ಆಗಿವೆ. ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಅವುಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದ t_1, t_2, t_3 ಆಗಿವೆ. $BC \cdot t_1^2+CA \cdot t_2^2+AB \cdot t_3^2=0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

20 ನಾಲ್ಕು ಸ್ಥಿರವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದ t_1, t_2, t_3, t_4 ಎಂದಿದ್ದರೆ, $At_1^2+Bt_2^2+Ct_3^2+Dt_4^2+E=0$ ಎಂಬ ಸಂಬಂಧವಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

21 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ಮತ್ತು ಮೂಲಬಿಂದುವು ಪರಮಾವಧಿ ಬಿಂದುವಾಗಿ ರಚನೆಯಾಗುವ ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಇನ್ನೊಂದು ಪರಮಾವಧಿ ಬಿಂದು

$\left(\frac{-gc}{g^2+f^2}, \frac{-fc}{g^2+f^2}\right)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

22 $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ ಮತ್ತು
$x^2 + y^2 + 10x + 12y + 45 = 0$

ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು 3 : 4 ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

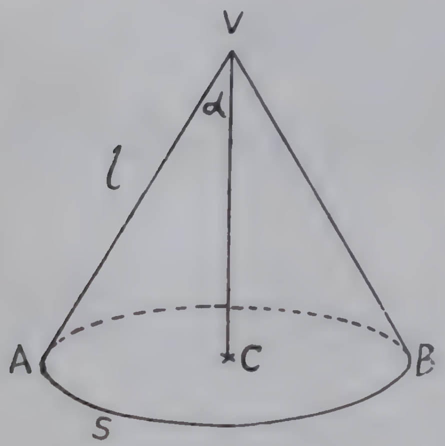
23 $x^2 + y^2 - 14x + 6y + 33 = 0$ ಮತ್ತು
$x^2 + y^2 + 30x - 2y + 1 = 0$

ವೃತ್ತಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಐದನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯ

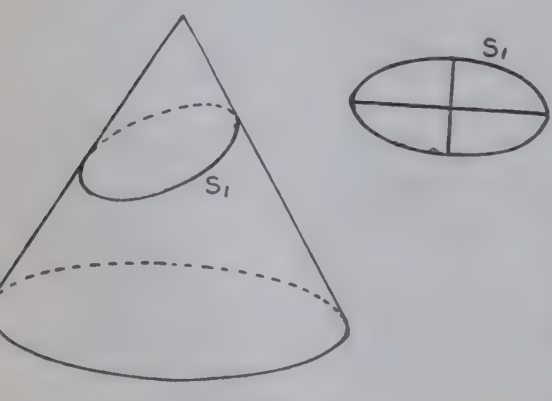
ಶಂಕುಜಗಳು

5.1 ಶಂಕುಜಗಳು—ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಅದರ ಸಮತಲಕ್ಕೆ ಒಂದು ಲಂಬವನ್ನೆಳೆಯಬೇಕು. ಈ ಲಂಬದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಂಡು (V) ಅದನ್ನು ವೃತ್ತಪರಿಧಿಗೆ (S) ಜೋಡಿಸಿದರೆ ದೊರೆಯುವ ಘನಾಕೃತಿಗೆ ಲಂಬವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕು ಎಂದು ಹೆಸರು. ಈ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ಶಂಕು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ವೃತ್ತ S ನ್ನು ತಳವೆಂದೂ, ಲಂಬ VC ಯನ್ನು ಅಕ್ಷವೆಂದೂ, ಬಿಂದು V ಯನ್ನು ಶೃಂಗವೆಂದೂ, ಶೃಂಗವನ್ನು ತಳದ ಪರಿಧಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಜನಕ ರೇಖೆಗಳು (ಸರಳವಾಗಿ ಜನಕಗಳು) ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಜನಕಕ್ಕೂ ಅಕ್ಷಕ್ಕೂ ನಡುವೆಯಿರುವ ಸ್ಥಿರ ಕೋನವನ್ನು (α) ಶೃಂಗಾರ್ಧ ಕೋನವೆಂದೂ, ಅಕ್ಷದ ಉದ್ದವನ್ನು (VC) ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

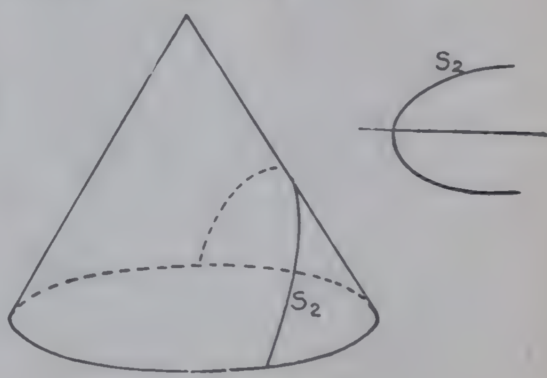


ಚಿತ್ರ 5.1

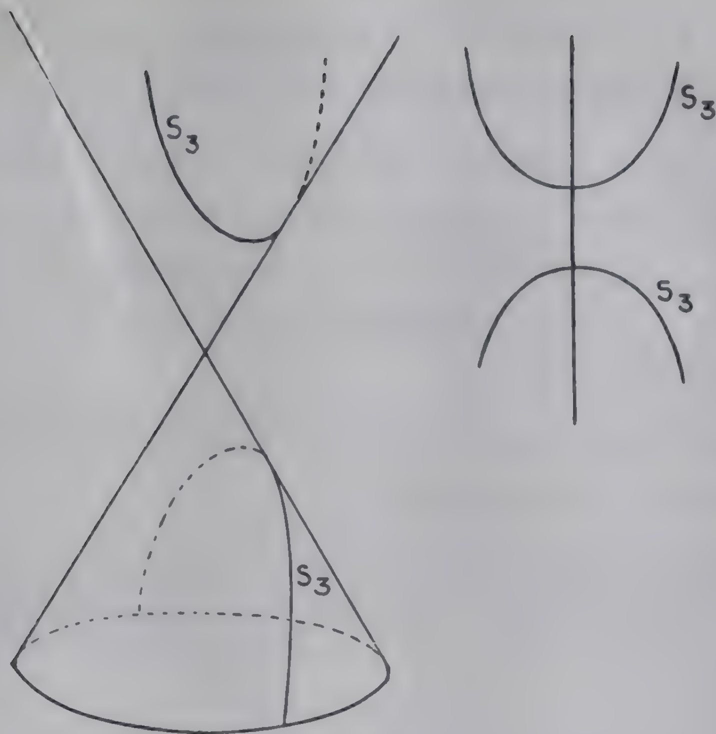
ರೂಢಿಯಲ್ಲಿ ಶಂಕು ಶೃಂಗದಿಂದ ತಳದವರೆಗೆ ಮಾತ್ರ ವ್ಯಾಪಿಸಿರುವ ಘನಾಕೃತಿಯಾಗಿ ಕಂಡರೂ, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಜನಕಗಳನ್ನು ಅಖಂಡವಾಗಿ



ಚಿತ್ರ 5.2



ಚಿತ್ರ 5.3



ಚಿತ್ರ 5.4

ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಶಂಕು ಅದರ ಶೃಂಗವನ್ನು ಕುರಿತು ಸಮಾಂಗವಾಗಿದೆ. ಈಗ ಶೃಂಗ, ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು ಶೃಂಗಾರ್ಧಕೋನ ದತ್ತವಾದಾಗ ಶಂಕು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ದೊರೆತಂತಾಯಿತು ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಇಂತಹ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಶಂಕುವನ್ನು ಒಂದು ಸಮತಲವು ಛೇದಿಸಲಿ. ಛೇದನವಾದಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುವ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಶಂಕುವಿನ ಸಮತಲ ಛೇದನ ಅಥವಾ ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ಶಂಕುಚ್ಛೇದ ಅಥವಾ ಶಂಕುಜವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಶಂಕುಜಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮತಲ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳೆಂದು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

ಸಮತಲವು ಅಕ್ಷದೊಡನೆ ಮಾಡುವ ಕೋನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಶಂಕುಜಗಳು ವಿವಿಧ ರೂಪಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುವು. ಈ ಕೋನ $\beta (\leqslant \frac{\pi}{2})$ ಎಂದಿರಲಿ.

(1) $\beta = \frac{\pi}{2}$ ಆದಾಗ ಸಮತಲವೂ ಅಕ್ಷವೂ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವುವು. ಈಗ ದೊರೆಯುವ ಶಂಕುಜ ಒಂದು ವೃತ್ತ. ಇದು ತಳವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆ.

(2) $\beta > \alpha$ ಆಗಿರುವಾಗ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಮುಚ್ಚಿರುವ ಅಖಂಡ ವಕ್ರರೇಖೆಯು ದೊರೆಯುವುದು. ಇದನ್ನು ದೀರ್ಘವೃತ್ತ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ (S_1, ಚಿತ್ರ 5.2).

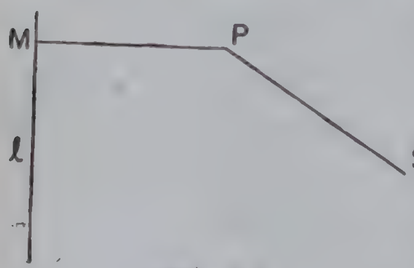
(3) $\beta = \alpha$ ಆಗಿರುವಾಗ ಮುಚ್ಚಿರದ ಒಂದು ಅನಂತ ವಕ್ರರೇಖೆಯು ದೊರೆಯುವುದು. ಇದನ್ನು ಪೆರಾಬೊಲಾ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ (S_2, ಚಿತ್ರ 5.3).

(4) $\beta < \alpha$ ಆಗಿರುವಾಗ ಸಮತಲವು ಶಂಕುವಿನ ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಗಳನ್ನೂ ಛೇದಿಸುವುದು. ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದೊಂದು ಮುಚ್ಚಿರದ, ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂಗವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಅನಂತ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು. ಇವೆರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಹೆಸರು ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ (S_3, ಚಿತ್ರ 5.4).

ಕೆಲವು ವಿಶೇಷ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳೂ, ಒಂದು ಜೊತೆ ಬಿಂದುಗಳೂ ದೊರೆಯುವುದಿದೆ.

ಸಮಗ್ರವಾಗಿ ಈ ಎಲ್ಲ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳಿಗೂ ಶಂಕುಜಗಳೆಂದು ಹೆಸರಿದ್ದರೂ ರೂಢಿಯಲ್ಲಿ ದೀರ್ಘವೃತ್ತ, ಪೆರಾಬೊಲಾ, ಹೈಪರ್ಬೋಲಾಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಈ ಹೆಸರಿನಿಂದ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

5.2 ನಾಭೀಚಾಲಕಗುಣ—ನಾಭಿ ಅನ್ನುವುದು ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದು, S. ಚಾಲಕ ಅನ್ನುವುದು (ನಾಭಿಯ ಮೂಲಕ ಸಾಗದ) ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸರಳರೇಖೆ, *l*. P ಯು ಒಂದು ಚರಬಿಂದು, (S. *l* ಗಳ ಸಮತಲದಲ್ಲಿದೆ). PM ನ್ನು *l* ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. $\frac{SP}{PM} = e$, (ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ) ಆಗಿರುವಂತೆ P ಯು ಚಲಿಸಿದರೆ ಅದು ರೇಖಿಸುವ ವಕ್ರರೇಖೆ ಒಂದು ಶಂಕುಜ. ಶಂಕುಜವನ್ನು ಪಡೆಯಲಿರುವ, $\frac{SP}{PM} = e$ ಎಂಬ ಈ ಗುಣವನ್ನು ನಾಭೀಚಾಲಕಗುಣ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 5.5

ಒಂದು ಲಂಬನಿರ್ದೇಶಕವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಪ್ರಕಾರ S ಬಿಂದುವು (a, b) ಎಂದಿರಲಿ. *l* ಸರಳರೇಖೆಯು $px + qy + r = 0$ ಎಂದಿರಲಿ. ಚರಬಿಂದು P ಯ ಒಂದು ಸ್ಥಾನ (x_1, y_1) ಎಂದಿದ್ದರೆ ನಾಭೀಚಾಲಕಗುಣದಿಂದ $SP^2 = e^2 PM^2$ ಎಂದಿರುವುದರಿಂದ

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = e^2 \frac{(px_1 + qy_1 + r)^2}{p^2 + q^2}$$

$\therefore$ P ಯ ಪಥ ಸಮೀಕರಣವು

$$(p^2 + q^2)[(x-a)^2 + (y-b)^2] = e^2(px + qy + r)^2$$

x, y ಗಳಲ್ಲಿ ಇದು ಎರಡನೆಯ ಘಾತದ ಸಮೀಕರಣ.

e ಯನ್ನು ಶಂಕುಜದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. $e < 1$ ಆಗಿರುವಾಗ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವೂ, $e = 1$ ಆಗಿರುವಾಗ ಪೆರಾಬೊಲಾವೂ, $e > 1$ ಆಗಿರುವಾಗ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವೂ ದೊರೆಯುವುವು.

5.3 ಶಂಕುಜ ಮತ್ತು ಸರಳರೇಖೆ—x, y ಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಘಾತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ

$$S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

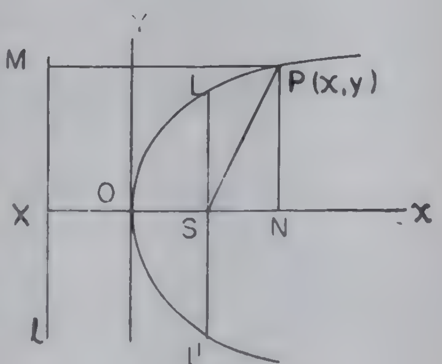
ಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಇದು ಶಂಕುಜವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು ಎಂದು 5.5 ಪರಿಚ್ಛೇದದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗುವುದು.

$L \equiv lx + my + n = 0$ ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಯು ಈ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದೆಂದು ಇವೆರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಇವೆರಡು ಬಿಂದುಗಳು ಸಂಗಮಿಸಿದಾಗ ಸರಳರೇಖೆಯು ಶಂಕುಜಕ್ಕೆ ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಶಂಕುಜವನ್ನು ಎರಡು ಸಂಗಮ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆ ಅದರ ಸ್ಪರ್ಶಕ.

5.4 ಶಂಕುಜಗಳ ಸುಲಭ ಸಮೀಕರಣಗಳು—

(a) ಪೆರಾಬೊಲಾ

S ನಾಭಿ, l ಚಾಲಕ ಆಗಿವೆ. SX ನ್ನು l ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆದರೆ ಇದು ಸ್ಥಿರ ಉದ್ದವಾಗಿದೆ. $SX = 2a$ ಎಂದಿರಲಿ. SX ನ ಮಧ್ಯಬಿಂದು O ವನ್ನು ಮೂಲ ಬಿಂದು, OS ನ್ನು x–ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು ಇದಕ್ಕೆ O ನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬ y–ಅಕ್ಷವೆಂದೂ ಆರಿಸಬೇಕು. ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಪ್ರಕಾರ S ಬಿಂದು $(a, 0)$ ಆಗಿದೆ. P (x, y) ಒಂದು ಚರಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ನಾಭೀಚಾಲಕ ಗುಣದ ಪ್ರಕಾರ,



ಚಿತ್ರ 5.6

$$\frac{SP}{PM} = e = 1$$

$$\therefore \; SP^2 = PM^2$$

$$\therefore \; (x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$$

$$\therefore \; y^2 = 4ax \qquad (5.1)$$

ಇದು ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಸುಲಭ ಸಮೀಕರಣ.

x, y ಗಳಿಗೆ ವಿವಿಧ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಇದರ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸಬಹುದು. ಇದೊಂದು ಮುಚ್ಚಿರದ ಅನಂತ ವಕ್ರರೇಖೆ. ಇದು x–ಅಕ್ಷವನ್ನು ಕುರಿತು ಸಮಾಂಗವಾಗಿದೆ. x ನ ಋಣಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಊಹಾಜನ್ಯವಾಗಿದೆ. ಈ ವಕ್ರರೇಖೆಯು x–ಅಕ್ಷವನ್ನು ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಛೇದಿಸುವುದು. y–ಅಕ್ಷ ಇದಕ್ಕೆ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿದೆ.

O ವನ್ನು ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಶೃಂಗವೆಂದೂ, Ox ನ್ನು ಸಮಾಂಗಾಕ್ಷ ಅಥವಾ ಅಕ್ಷವೆಂದೂ, Oy ನ್ನು ಶೃಂಗದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. LSL′ ನ್ನು S ಮೂಲಕ x–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆದರೆ, L (a, SL) ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಮೇಲಿದೆ.

$$\therefore \; SL^2 = 4a \cdot a$$

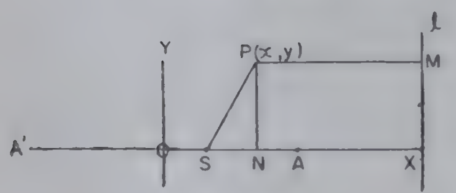
$$\therefore \; SL = 2a$$

$$\therefore \; LL' = 4a$$

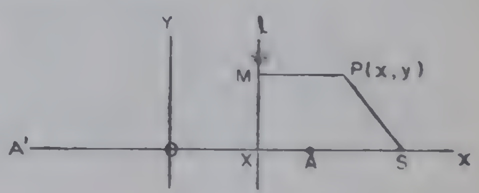
LL′ ನ್ನು ನಾಭೀಲಂಬವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. $SL = SL' = 2a$ ಇದು ಅರ್ಧ ನಾಭೀಲಂಬ. ಆದ್ದರಿಂದ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣವು

$y^2 =$ (ನಾಭೀಲಂಬ) $\times \, x$

(b) ದೀರ್ಘವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ—



ದೀರ್ಘವೃತ್ತ, $e < 1$
ಚಿತ್ರ 5.7



ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ, $e > 1$
ಚಿತ್ರ 5.8

ನಾಭಿ S ನಿಂದ ಚಾಲಕ l ಗೆ SX ನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಬೇಕು. SX ಸ್ಥಿರ ಉದ್ದವಾಗಿದೆ. X ಸ್ಥಿರಬಿಂದು. SX ನ್ನು ಒಳಗೂ ಹೊರಗೂ $e:1$ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಬೇಕು. ಈ ಬಿಂದುಗಳು A, A′ ಆದರೆ ಅವು ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ. $AA' = 2a$ ಎಂದಿರಲಿ. O ಬಿಂದು A′A ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಮೇಲಿನ ಎರಡೂ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ,

$$e = \frac{SA}{AX} = \frac{SA'}{A'X} = \frac{SA + SA'}{AX + A'X} = \frac{SA' - SA}{A'X - AX}$$

$$= \frac{2.OA}{2.OX} = \frac{2.OS}{2.OA}$$

$$= \frac{a}{OX} = \frac{OS}{a}$$

$$\therefore\ OS = ae,\ OX = \frac{a}{e}$$

O ವನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದು, OS ನ್ನು x–ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು OS ಗೆ O ನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬ y–ಅಕ್ಷವೆಂದು ಆರಿಸಬೇಕು. ಆಗ S (ae, o) X $\left(\frac{a}{e},\ 0\right)$ ಆಗುವುವು. ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಪ್ರಕಾರ, $P(x, y)$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. PM ಚಾಲಕದ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ.

ನಾಭೀಚಾಲಕ ಗುಣದ ಪ್ರಕಾರ,

$$\frac{SP}{PM} = e,\ SP^2 = e^2 PM^2$$

$$\therefore\ (x - ae)^2 + y^2 = e^2 \left(\frac{a}{e} - x\right)^2$$

$$\therefore\ x^2 + a^2e^2 - 2axe + y^2 = a^2 + e^2x^2 - 2\,axe$$

ದೀರ್ಘವೃತ್ತದಲ್ಲಿ $e < 1$. ಆಗ ಈ ಸಮೀಕರಣವು

$x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2)$ ಎಂದಾಗುವುದು

$\therefore\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ಇಲ್ಲಿ $a^2(1 - e^2) = b^2$ ಎಂದು ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ.

ಇದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸುಲಭ ಸಮೀಕರಣ.

ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದಲ್ಲಿ $e > 1$. ಆಗ ಸಮೀಕರಣವು

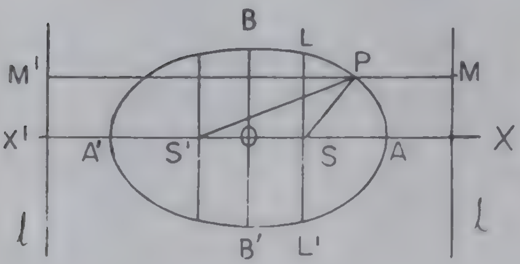
$$x^2(e^2 - 1) - y^2 = a^2(e^2 - 1)$$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$ ಇಲ್ಲಿ $a^2(e^2-1)=b^2$ ಎಂದು ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ.

ಇದು ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಸುಲಭ ಸಮೀಕರಣ.

ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸುಲಭ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, b^2 = a^2(1-e^2)$$



ಚಿತ್ರ 5·9

x, y ಗಳಿಗೆ ವಿವಿಧ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಇದರ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸಬಹುದು. ಇದೊಂದು ಮುಚ್ಚಿರುವ ಅಖಂಡ ವಕ್ರರೇಖೆ. ಇದು x ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಸಮಾಂಗವಾಗಿದೆ. x–ಅಕ್ಷವನ್ನು ಇದು A, A′ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಯೂ, y–ಅಕ್ಷವನ್ನು B, B′ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಸಂಧಿಸುವುದು. $OA = OA' = a$, $OB = OB' = b$; $|x| > a$, $|y| > b$ ಆದಾಗ ವಕ್ರರೇಖೆ ಊಹಾಜನ್ಯವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ಇದು $x = \pm a$, $y = \pm b$ ಆಯತಾಕಾರದೊಳಗೆ ಸೀಮಿತವಾಗಿದೆ. A′A ಯನ್ನು ದೀರ್ಘಾಕ್ಷವೆಂದೂ, B′B ಯನ್ನು ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. O ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದು. O ಮೂಲಕ ಸಾಗಿ ವಕ್ರರೇಖೆಯಿಂದ ಸೀಮಿತವಾಗುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸರಳರೇಖೆಯೂ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ. ಯಾವ ವ್ಯಾಸವೂ ದೀರ್ಘಾಕ್ಷಕ್ಕಿಂತ ಉದ್ದವಾಗಿಲ್ಲವೆಂದೂ ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷಕ್ಕಿಂತ ಕಿರಿದಾಗಿಲ್ಲವೆಂದೂ ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮಾಂಗತ್ವದಿಂದ ಅದಕ್ಕೆ S′ ಎನ್ನುವ ($OS' = ae$) ಇನ್ನೊಂದು ನಾಭಿ ಇದೆಯೆಂದೂ ಅದಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪವಾದ l' ಎನ್ನುವ ಇನ್ನೊಂದು ಚಾಲಕ ಇದೆಯೆಂದೂ ತರ್ಕಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈಗ, $\frac{SP}{PM}=\frac{S'P}{PM'}=e.$

$$\therefore\ SP + S'P = e(PM + PM') = e.\frac{2a}{e} = 2a$$

$$= \text{ದೀರ್ಘಾಕ್ಷ}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ನಾಭೀದೂರಗಳ ಮೊತ್ತವು ದೀರ್ಘಾಕ್ಷದ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಈ ಗುಣದ ಸಹಾಯದಿಂದ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಯಾಂತ್ರಿಕ ರಚನೆ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.

ನಾಭೀಲಂಬವು LL′. L ಬಿಂದು (ae, SL). ಇದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ

$$\frac{a^2e^2}{a^2}+\frac{SL^2}{b^2}=1,\ SL^2=b^2(1-e^2)=\frac{b^4}{a^2}$$

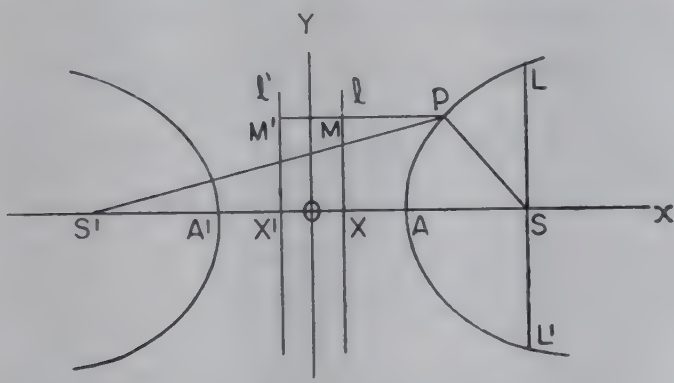
$$\therefore\ SL=\frac{b^2}{a}$$

ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ $e<1$ ಆಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಕಿರಿದುಗೊಳಿಸುತ್ತ ಹೋಗಿ ಕೊನೆಗೆ $e=0$ ಬೆಲೆ ತಲುಪಿದಾಗ, $OS=OS'=0$, $b^2=a^2(1-e^2)=a^2$, ಆಗುವುವು. ಸಮೀಕರಣವೀಗ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ ಅಥವಾ $x^2+y^2=a^2$. ಇದು ವೃತ್ತ. ನಾಭಿಗಳು ಇದರ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಿಸಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುವ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವೇ ವೃತ್ತ.

ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ b^2=a^2(e^2-1)$$

x, y ಗಳಿಗೆ ವಿವಿಧ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಇದರ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸಬಹುದು. ಇದು ತೆರೆದಿರುವ ಎರಡು ಪರಸ್ಪರ ಸರ್ವಸಮ



ಚಿತ್ರ 5.10

ಶಾಖೆಗಳಿಂದ ಕೂಡಿರುವ ಅನಂತ ವಕ್ರರೇಖೆ. ಇದು x ಮತ್ತು y–ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಸಮಾಂಗವಾಗಿದೆ. x–ಅಕ್ಷವನ್ನು A, A′ ($OA=OA'=a$) ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು. y-ಅಕ್ಷವನ್ನು $(0, \pm bi)$ ಎನ್ನುವ ಊಹಾಜನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು. $-a<x<a$ ಆಗಿರುವಾಗ ಈ ವಕ್ರರೇಖೆ ಊಹಾ

ಜನ್ಯವಾಗಿದೆ. $x \to a, x \to -a$ ಆಗಿರುವಾಗ y ಯ ಬೆಲೆ ಮಿತಿರಹಿತವಾಗಿ ಏರುವುದು. A′A ಅಕ್ಷವನ್ನು ಅನುಪ್ರಸ್ಥ ಅಕ್ಷವೆಂದೂ Oy ನ್ನು ಅನುವರ್ತಿ ಅಕ್ಷವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಸಮಾಂಗತ್ವದಿಂದ S′, l' ಎನ್ನುವ ಇನ್ನೊಂದು ಜೊತೆ ನಾಭಿ, ಚಾಲಕ ಇದಕ್ಕಿವೆ ಎಂದು ತರ್ಕಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$SP = e\,PM$$
$$S'P = e\,PM'$$
$$\therefore \;\; S'P - SP = e\,(PM' - PM) = 2a$$

ಅಥವಾ $SP \sim S'P = 2a$

ಆದ್ದರಿಂದ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ನಾಭೀದೂರಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ. ಇದರ ಬೆಲೆ ಅದರ ಶೃಂಗ ಮಧ್ಯ ದೂರ.

ನಾಭೀಲಂಬವು L′L ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ L (ae, SL) ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ,

$$\frac{a^2e^2}{a^2} - \frac{SL^2}{b^2} = 1,$$

$$SL^2 = b^2(e^2 - 1) = \frac{b^4}{a^2}, \;\; SL = \frac{b^2}{a}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಅರ್ಧನಾಭೀಲಂಬವು $\dfrac{b^2}{a}$ ಆಗಿದೆ.

ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ b^2 ನ್ನು $-b^2$ ಆಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಸಮೀಕರಣವು ದೊರೆಯುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಹಲವಾರು ಗುಣಗಳನ್ನು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಅನುರೂಪ ಗುಣಗಳ ಅಭ್ಯಾಸದಿಂದ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

5·5 x, y ಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಘಾತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ— 5·1 ರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಶಂಕುಜದ ಸಮೀಕರಣ x, y ಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಘಾತದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ನೋಡಿದೆವು. ಈಗ, ಇಂತಹ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಒಂದು ಶಂಕುಜವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ.

I Ox, Oy ಲಂಬನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಪ್ರಕಾರ,
$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ಎಂದಿರುವ ಸಮೀಕರಣ, OX, OY ಲಂಬನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಪ್ರಕಾರ, $a'X^2 + 2h'XY + b'Y^2 = 0$ ಎಂದು ಪರಿವರ್ತನೆ

ಗೊಳ್ಳಲಿ. ಇಲ್ಲಿ Ox, Oy ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು O ವಿನ ಸುತ್ತ θ ಕೋನದಷ್ಟು ಆವರ್ತಿಸಿ OX, OY ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

$x = \mathrm{X}\cos\theta - \mathrm{Y}\sin\theta$

$y = \mathrm{X}\sin\theta + \mathrm{Y}\cos\theta$ ಎಂದು (1.2) ರಿಂದ ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore\ a' = a\cos^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta + b\sin^2\theta$$

$$b' = a\sin^2\theta - 2h\sin\theta\cos\theta + b\cos^2\theta$$

$$h' = -(a-b)\sin\theta\cos\theta + h(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

$\therefore\ a' + b' = a + b$, ಮತ್ತು

$a'b' - h'^2 = ab - h^2$

ಆದ್ದರಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಆವರ್ತನ ಚಲನೆಯಲ್ಲಿ $a+b, ab-h^2$ ಈ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ನಿಶ್ಚರವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ. ಇಂತಹ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು (ಆವರ್ತನ ಚಲನೆಗೆ) ನಿಶ್ಚರಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

II $\mathrm{S} \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

ಇದು x, y ಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಘಾತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ. ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು O ವಿನ ಸುತ್ತ θ ಕೋನದಷ್ಟು ಆವರ್ತಿಸಿ ನೂತನ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು OX, OY ಎಂದು ಕರೆದರೆ, ಅದರಲ್ಲಿ $\mathrm{S} = 0$ ಸಮೀಕರಣವು

$$a'\mathrm{X}^2 + 2h'\mathrm{XY} + b'\mathrm{Y}^2 + 2g'\mathrm{X} + 2f'\mathrm{Y} + c' = 0$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಇಲ್ಲಿ, $h' = -(a-b)\sin\theta\cos\theta + h(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$h' = 0$ ಆಗುವಂತೆ θ ವನ್ನು ಆರಿಸಬೇಕು.

ಆಗ, $\tan 2\theta = \dfrac{2h}{a-b}$

ಸಮೀಕರಣದ ನೂತನ ರೂಪವು,

$\mathrm{AX}^2 + \mathrm{BY}^2 + 2\,\mathrm{GX} + 2\,\mathrm{FY} + \mathrm{C} = 0$ ಎಂದಿರಲಿ. ನಿಶ್ಚರಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತದಿಂದ,

$\mathrm{A} + \mathrm{B} = a + b$

$\mathrm{AB} = ab - h^2$

(i) $ab - h^2 = 0$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\therefore\ \mathrm{AB} = 0$

$\therefore$ ಒಂದೋ $A = 0$, ಅಥವಾ $B = 0$

$B = 0$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

$$\therefore \quad AX^2 + 2GX + 2FY + C = 0$$

$$\therefore \left(X + \frac{G}{A}\right)^2 = -\frac{2F}{A}\left[Y + \frac{C}{2F} + \frac{G^2}{2AF}\right]$$

OX, OY ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ

$O'\left[-\frac{G}{A}, -\left(\frac{C}{2F} + \frac{G^2}{2AF}\right)\right]$ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸ್ಥಾನಾಂತರಿಸಿ, ನೂತನ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು $O'X'$ ಮತ್ತು $O'Y'$ ಎಂದು ಕರೆದರೆ ಈ ಸಮೀಕರಣವು,

$X'^2 = -\frac{2F}{A}Y'$ ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದು ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಸುಲಭರೂಪ.

$\therefore \; ab - h^2 = 0$ ಆದಾಗ $S = 0$ ಒಂದು ಪೆರಾಬೊಲಾವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.

(ii) $ab - h^2 \neq 0$ ಎಂದಿರಲಿ. ಈಗ A ಅಥವಾ B ಯಾವುದೂ ಸೊನ್ನೆಯಾಗುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಸಮೀಕರಣವು ಈಗ,

$$A\left[X + \frac{G}{A}\right]^2 + B\left[Y + \frac{F}{B}\right]^2 = \frac{G^2}{A} + \frac{F^2}{B} - C$$

OX, OY ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ $O'\left[-\frac{G}{A}, -\frac{F}{B}\right]$ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸ್ಥಾನಾಂತರಿಸಿ ನೂತನ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು $O'X'$, $O'Y'$ ಎಂದು ಕರೆದರೆ ಈ ಸಮೀಕರಣವು

$AX'^2 + BY'^2 = \lambda^2$, $\lambda^2 = \frac{G^2}{A} + \frac{F^2}{B} - C$ ಎಂದಾಗುವುದು.

$$\therefore \quad \frac{X'^2}{\frac{\lambda^2}{A}} + \frac{Y'^2}{\frac{\lambda^2}{B}} = 1$$

(a) $ab - h^2 > 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $AB > 0$. $\therefore$ A, B ಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ, ಎರಡೂ ಧನ ಅಥವಾ ಎರಡೂ ಋಣ. $\therefore$ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಮೇಲಿನ ರೂಪ ಒಂದು ದೀರ್ಘ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.

(b) $ab - h^2 < 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $AB < 0$. ∴ A, B ಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ವಿರೋಧವಾಗಿವೆ, ಒಂದು ಧನ ಇನ್ನೊಂದು ಋಣ. ∴ ಈ ಸಂದರ್ಭ ದಲ್ಲಿ ಮೇಲಿನ ರೂಪ ಒಂದು ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡನೆಯ ಘಾತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಂದು ಶಂಕುಜವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.

ಇದುವರೆಗೆ ನಾವು ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿ ದಂತಾಯಿತು. ಇದರ ತಾತ್ಪರ್ಯ ಹೀಗಿದೆ:—

(i) $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$

ಆದಾಗ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.

(ii) $a = b,\ h = 0$ ಆದಾಗ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.

(iii) $ab - h^2 > 0$ ಆದಾಗ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನೂ
$ab - h^2 = 0$ ಆದಾಗ ಪೆರಾಬೋಲಾವನ್ನೂ
$ab - h^2 < 0$ ಆದಾಗ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ

$14x^2 - 4xy + 11y^2 - 36x + 48y + 41 = 0$ ಸಮೀಕರಣವು ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ. ಅದರ ಅಕ್ಷಗಳ ಉದ್ದ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ $ab - h^2 = 154 - 4 = 150 > 0$. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಸಾಮಾನ್ಯ ವಾಗಿ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.

ಆವರ್ತನೆಯ ಕೋನ, θ ವನ್ನು

$$\tan 2\theta = \frac{2h}{a - b} = -\frac{4}{3}$$ ಎಂದು ಆರಿಸಬೇಕು.

∴ $\tan \theta = 2$ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ,

$$x = \frac{X}{\sqrt{5}} - \frac{2Y}{\sqrt{5}},\ y = \frac{2X}{\sqrt{5}} + \frac{Y}{\sqrt{5}}$$

Ox, Oy ನ್ನು O ವಿನ ಸುತ್ತ θ ದಷ್ಟು ಆವರ್ತಿಸಿ ದೊರೆಯುವ ವ್ಯವಸ್ಥೆ OX, OY ಎಂದಾದರೆ, ಆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣವು,

$$10\left[X + \frac{3}{\sqrt{5}}\right]^2 + 15\left[Y + \frac{4}{\sqrt{5}}\right]^2 = 25$$

$$O'\left[-\frac{3}{\sqrt{5}},\ -\frac{4}{\sqrt{5}}\right]$$

ಬಿಂದುವಿಗೆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಸಮಾನಾಂತರ ಸ್ಥಾನಾಂತರಗೊಳಿಸಿ, X′, Y′ ಗಳನ್ನು ನೂತನ ವಿನಿಮಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳೆಂದಿಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ, ಈ ಸಮೀಕರಣವು

$2X'^2 + 3Y'^2 = 5$ ಆಗುವುದು.

$$\frac{X'^2}{\frac{5}{2}} + \frac{Y'^2}{\frac{5}{8}} = 1$$

$\therefore$ ಈ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಅರ್ಧಾಕ್ಷಗಳ ವರ್ಗಗಳು $\frac{5}{2}$ ಮತ್ತು $\frac{5}{3}$

ಇದರ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ $\frac{5}{3} = \frac{5}{2}(1 - e^2)$

$$e = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.1

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸೂಚಿಸುವ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಶಂಕುಜಗಳಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅಕ್ಷಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನೂ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯನ್ನೂ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(*a*) $2x^2 + 3y^2 - 12x + 12y + 24 = 0$

(*b*) $8x^2 + 12xy - 8y^2 + 12x + 4y + 3 = 0$

(*c*) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 3x + y + 1 = 0$

(*d*) $12x^2 + 7xy - 12y^2 - 17x - 31y - 7 = 0$

(*e*) $9x^2 + 4xy + 6y^2 - 22x - 16y + 9 = 0$

ಆರನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯ

ಪೆರಾಬೊಲಾ

6.1 ಕೆಲವು ಪ್ರಮುಖರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು—

$S \equiv y^2 - 4ax = 0$ ಪೆರಾಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕೆಲವು ಪ್ರಮುಖರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ. (ಪರಿಚ್ಛೇದ 4.4 ರಲ್ಲಿ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನೀಡಿದ್ದೇವೆ.)

(*a*) $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ಎಂಬ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಜೋಡಣೆಯ (ಜ್ಯಾ) ಸಮೀಕರಣ.

$$(S_1 + S_2 = S_{12})$$

$$yy_1 - 2a(x + x_1) + yy_2 - 2a(x + x_2) = y_1y_2 - 2a(x_1 + x_2)$$

$$\therefore\ 4ax - (y_1 + y_2)y + y_1y_2 = 0$$

(*b*) ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಮೇಲಿರುವ $P(x_1, y_1)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕ. $(S_1 = 0)$

$$yy_1 - 2a(x + x_1) = 0$$

(*c*) $P(x_1, y_1)$ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿರುವ ಜ್ಯಾದ ಸಮೀಕರಣ $(S_1 = S_{11})$

$$yy_1 - 2a(x + x_1) = y_1^2 - 4ax_1$$

$$2ax - y_1y + y_1^2 - 2ax_1 = 0$$

(*d*) $P(x_1, y_1)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಪರ್ಶಕಜ್ಯಾ ಮತ್ತು ಧ್ರುವೀಯಗಳ ಸಮೀಕರಣ $S_1 = 0$

(*e*) $P(x_1, y_1)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ $(SS_{11} = S_1^2)$

$$(y^2 - 4ax)(y_1^2 - 4ax_1) = [yy_1 - 2a(x + x_1)]^2$$

6.2 ಪೆರಾಬೊಲಾ ಮತ್ತು ಸರಳರೇಖೆ—

$y = mx + c$ ಸರಳರೇಖೆಯು

$y^2 = 4ax$ ಪೆರಾಬೊಲಾವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಇವೆರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ x, y ಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$(mx + c)^2 = 4ax$$

$$m^2x^2 + 2(mc - 2a)x + c^2 = 0$$

ಇದು x ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಇದಕ್ಕೆ ಎರಡು ಮೂಲಗಳಿವೆ. ಈ ಮೂಲಗಳು ಸರಳರೇಖೆ ಮತ್ತು ಪೆರಾಬೊಲಾಗಳ ಛೇದನಬಿಂದುಗಳ x–ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು. ಇವುಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅನುರೂಪ y–ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಸರಳರೇಖೆಯು ಪೆರಾಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಲು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಮೂಲಗಳೂ ಐಕ್ಯವಾಗಬೇಕು.

$$\triangle = 4(mc - 2a)^2 - 4m^2c^2 = 0$$

$$\therefore\ c = \frac{a}{m} \qquad (6.1)$$

$\therefore\ y = mx + \dfrac{a}{m}$. m ನ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಪೆರಾಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿದೆ. ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು $\left(\dfrac{a}{m^2}, \dfrac{2a}{m}\right)$ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

$m = \dfrac{1}{t}$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$\left.\begin{array}{l} x = at^2 \\ y = 2at \end{array}\right\}$ t ಯ ವಿಶಿಷ್ಟಬೆಲೆಗಳಿಗೂ $y^2 = 4ax$ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುವು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವು ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಪ್ರಾಚಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು. t ಪ್ರಾಚಲ.

6.3 ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ಗುಣಗಳು—

(1) t_1, t_2 ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿಕೆ.

ಈ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು $y.2at_1 = 2a(x + at_1^2)$

$y.2at_2 = 2a(x + at_2^2)$

ಅಥವಾ $x - t_1y + at_1^2 = 0$

$x - t_2y + at_2^2 = 0$

ಇವುಗಳ ಛೇದನಬಿಂದು $[at_1t_2, a(t_1 + t_2)]$ ಆಗಿದೆ.

(2) $y = mx + \dfrac{a}{m}$ ಸ್ಪರ್ಶಕವು ಒಂದು ದತ್ತಬಿಂದು $P(x_1, y_1)$ ಮೂಲಕ ಸಾಗಲಿ.

$$\therefore\ y_1 = mx_1 + \frac{a}{m}$$

$$x_1m^2 - y_1m + a = 0$$

ಇದು m ನಲ್ಲಿ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ. ಆದ್ದರಿಂದ P ಯ ಮೂಲಕ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಸಾಗುವುವು. ಅವುಗಳ ಓಟಗಳು m_1, m_2 ಎಂದಿದ್ದರೆ,

$$m_1 + m_2 = \frac{y_1}{x_1}$$

$$m_1m_2 = \frac{a}{x_1}$$

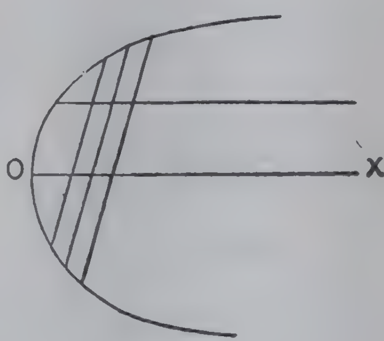
ಈ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ,

$$m_1m_2 = -1$$

$$\therefore\ x_1 + a = 0$$

ಈ ನಿಯಮಪ್ರಕಾರ P ಯ ಪಥವು $x + a = 0$ ಆಗಿದೆ. ಇದು ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಚಾಲಕ ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಲಂಬ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಚಾಲಕದ ಮೇಲೆ ಛೇದಿಸುವುವು.



ಚಿತ್ರ 6.1

(3) m ಓಟವಾಗಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಜ್ಯಾಗಳ ಒಂದು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಜ್ಯಾದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು $P(x_1, y_1)$ ಎಂದಿರಲಿ. ಜ್ಯಾದ ಸಮೀಕರಣವು

$$yy_1 - 2a(x + x_1) = y_1^2 - 4ax_1$$

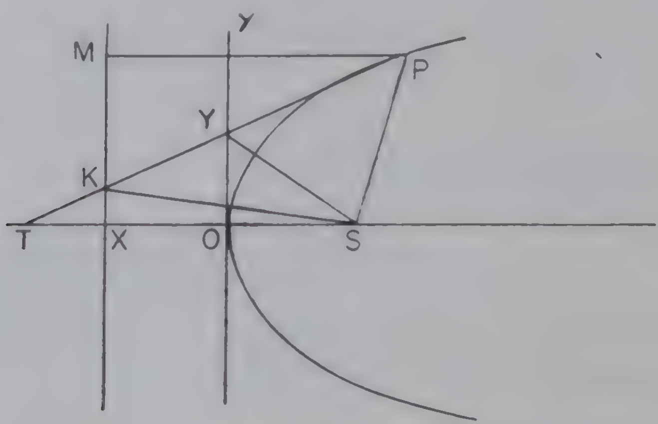
$$\text{ಇದರ ಓಟ} = \frac{2a}{y_1} = m \text{ (ದತ್ತ)}$$

$$\therefore \text{ P ಯ ಪಥವು } y = \frac{2a}{m}$$

ಇದು ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆ. ಇಂತಹ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪೆರಾಬೊಲಾದ ವ್ಯಾಸಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಸಮಾನಾಂತರ ಜ್ಯಾಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ವ್ಯಾಸದ ಮೇಲೆ ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿವೆ. ಈ ವ್ಯಾಸವು ಪೆರಾಬೊಲಾವನ್ನು $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದೆಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

(4) ಚಿತ್ರ 6.2 ರಲ್ಲಿ $P(at^2, 2at)$ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು. PT ಸ್ಪರ್ಶಕ. PM ಚಾಲಕದ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ. PT ಯ ಸಮೀಕರಣವು $x - yt + at^2 = 0$



ಚಿತ್ರ 6.2

$$\therefore \quad Y \equiv (0, at),$$

$$K \equiv \left[-a, \frac{a(t^2-1)}{t}\right]$$

$T \equiv [-at^2, 0]$ ಆಗಿವೆ.

(*a*) KS ನ ಓಟ $= -\frac{(t^2-1)}{2t}$

PS ನ ಓಟ $= \frac{2t}{t^2-1}$

ಇವೆರಡರ ಗುಣಲಬ್ಧ $= -1$

$$\therefore \quad \angle KSP = \frac{\pi}{2}$$

∴ ಚಾಲಕ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು ಇವುಗಳಿಂದ ಸೀಮಿತವಾಗಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಖಂಡವು ನಾಭಿಯಲ್ಲಿ ಸಮಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.

(b) $ST = a + at^2$

$$SP = \sqrt{(at^2 - a)^2 + 4a^2t^2} = a + at^2$$

$\therefore \quad ST = SP$

$\therefore \angle SPT = \angle STP$

$= $ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನ TPM

PT ಸ್ಪರ್ಶಕವು SPM ಕೋನವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವುದು. P ಯಲ್ಲಿ ಪೆರಾಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ಈ ಕೋನದ ಇನ್ನೊಂದು ದ್ವಿಭಾಜಕವಾಗುವುದು.

$\triangle^s$ PSK ಮತ್ತು PMK ಸರ್ವಸಮವೆಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

(c) SY ಯ ಓಟ $= -t$

PT ಯ ಓಟ $= \frac{1}{t}$

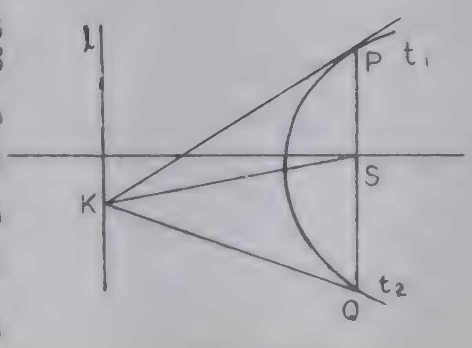
ಇವೆರಡರ ಗುಣಲಬ್ಧ $= -1$

$\therefore \quad \angle SYP = \frac{\pi}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ ನಾಭಿಯಿಂದ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳ ಪಾದಗಳು ಶೃಂಗಸ್ಪರ್ಶಕದ ಮೇಲೆ ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿವೆ.

(d) t_1, t_2, t_3 ಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು $\triangle$ ABC ಯನ್ನು ರಚಿಸಲಿ. S ನಿಂದ $\triangle$ ABC ಯ ಭುಜಗಳ ಮೇಲೆಳೆದ ಲಂಬಪಾದಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\triangle$ ABC ಯ ಪರಿವೃತ್ತ S ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದು. ಅಂದರೆ ಪೆರಾಬೊಲಾವನ್ನು ಆವೃತಿಸುವ ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಭುಜದ ಪರಿವೃತ್ತವೂ ನಾಭಿಯ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದು. ತ್ರಿಭುಜದ ಲಂಬಕೇಂದ್ರ H ಎಂದಿದ್ದರೆ, H ಚಾಲಕದ ಮೇಲಿರುವುದು.

(e) PSQ ಒಂದು ನಾಭೀಜ್ಯಾ ಆಗಿರಲಿ. P, Q ಗಳು t_1, t_2 ಆಗಿದ್ದರೆ $t_1t_2 + 1 = 0$ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ P, Q ಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಛೇದನಬಿಂದು $[-a, a(t_1 + t_2)]$ ಆಗುವುದು. ಇದು ಚಾಲಕದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದು. ಆದ್ದರಿಂದ $\angle PKQ = \frac{\pi}{2}$.



ಚಿತ್ರ 6.3

ಅಥವಾ, P ಯಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವು ಚಾಲಕವನ್ನು K ಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಆಗ $\angle PSK = \frac{\pi}{2}$. $\therefore$ KSQ $= \frac{\pi}{2}$. $\therefore$ KQ ರೇಖೆಯು Q ನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕ.

ಆದ್ದರಿಂದ ನಾಭೀಜ್ಯಾದ ಕೊನೆಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಚಾಲಕದ ಮೇಲೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವುವು.

6.4 ಪೆರಾಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಲಂಬ—P $(at^2, 2at)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ಪೆರಾಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. ಇದರ ಸಮೀಕರಣವು,

$$y - 2at = -t(x - at^2)$$

ಇದು ಒಂದು ದತ್ತ ಬಿಂದು Q(x_1, y_1) ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದೆಂದಿದ್ದರೆ ಅದರ ನಿಯಮ,

$$tx_1 + y_1 - at^3 - 2at = 0$$

$$at^3 + t(2a - x_1) - y_1 = 0 \qquad (6.2)$$

t ಯಲ್ಲಿ ಇದೊಂದು ಘನ ಸಮೀಕರಣ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ, ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಮೂರು ಲಂಬಗಳು ಸಾಗುವುವು. ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು t_1, t_2, t_3 ಎಂದಿದ್ದರೆ, ಅವು ಈ ಮೂರು ಲಂಬ ಪಾದಗಳ ಪ್ರಾಚಲಗಳು. ಈ ಲಂಬಪಾದಗಳನ್ನು Q ಬಿಂದುವಿಗೆ, ಸಹಲಂಬ ಬಿಂದುಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0$$

$$t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = \frac{2a - x_1}{a}$$

$$t_1t_2t_3 = \frac{y_1}{a}$$

$$\therefore\ 2at_1 + 2at_2 + 2at_3 = 0$$

$\therefore$ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಮೂರು ಲಂಬಪಾದಗಳ y–ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಬೈಜಿಕ ಮೊತ್ತ ಶೂನ್ಯವಾಗಿದೆ.

ದತ್ತಬಿಂದು Q(x_1, y_1) ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಮೇಲೆಯೇ ಇದ್ದರೆ ಒಂದು ವಿಶೇಷ ಪರಿಸ್ಥಿತಿ ಉಂಟಾಗುವುದು. ಈಗ ಒಂದು ಲಂಬಪಾದ Q ಬಿಂದುವೇ ಆಗುವುದು. Q ವಿನ ಪ್ರಾಚಲ t_1 ಎಂದಿದ್ದರೆ,

$$x_1 = at_1^2,\ y_1 = 2at_1$$

$$t_1t_2t_3 = \frac{y_1}{a} = 2t_1$$

$$\therefore\ t_2t_3 = 2$$

ಉದಾಹರಣೆ

(1) ಲಂಬಪಾದಗಳ ಪರಿವೃತ್ತ ಶೃಂಗದಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದು.

t_1, t_2, t_3 ಎಂಬ ಲಂಬಪಾದಗಳ ಪರಿವೃತ್ತ

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

ಎಂದಿರಲಿ. ಇದು ಪೆರಾಬೊಲಾವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಪ್ರಾಚಲ t ಎಂದಿದ್ದರೆ,

$$a^2t^4 + 4a(a+g)t^2 + 4fat + c = 0$$

ಎನ್ನುವ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಘಾತದ ಸಮೀಕರಣವು ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಪೆರಾಬೊಲಾಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ (ಅಥವಾ ಛೇದನ) ಬಿಂದುಗಳ ಪ್ರಾಚಲಗಳನ್ನು ನೀಡುವುದು. ಇವುಗಳ ಪೈಕಿ t_1, t_2, t_3 ದತ್ತವಾಗಿವೆ. ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪ್ರಾಚಲ t_4 ಎಂದಿರಲಿ.

$$\therefore\ t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$$

ಆದರೆ, $t_1 + t_2 + t_3 = 0$ (ಲಂಬಪಾದಗಳ ಪ್ರಾಚಲಗಳು)

$$\therefore\ t_4 = 0$$

(2) ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪೆರಾಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಮೂರು ಲಂಬಗಳು ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ಶೃಂಗದೂರಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಇದ್ದರೆ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ ಸಮೀಕರಣ $27ay^2 = 2(x-2a)^3$ ಆಗಿದೆ.

ದತ್ತಬಿಂದು $P(x_1, y_1)$ ಎಂದಿರಲಿ. ಲಂಬಪಾದಗಳ ಪ್ರಾಚಲಗಳು t_1, t_2, t_3 ಎಂದಿದ್ದರೆ

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0$$

$$t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = \frac{2a - x_1}{a}$$

$$t_1t_2t_3 = \frac{y_1}{a}$$

ಅಲ್ಲದೇ, 't_1' ಲಂಬದ ಅಕ್ಷಛೇದನಬಿಂದುವಿನ ಶೃಂಗದೂರವು $at_1^2 + 2a$ ಆಗಿದೆ

$$\therefore\ 2(at_2^2 + 2a) = (at_1^2 + 2a) + (at_3^2 + 2a)$$

$$\therefore\ 2t_2^2 = t_1^2 + t_3^2 = (t_1 + t_3)^2 - 2t_1t_3$$

$$= t_2^2 - 2\frac{t_1t_2t_3}{t_2}$$

$$\therefore\ t_2^2 = -2 \cdot \frac{y_1}{at_2}$$

$$\therefore\ t_2^3 = -\frac{2y_1}{a}$$

t_2 ಘನ ಸಮೀಕರಣ (6.2) ರ ಮೂಲವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$at_2^3 + t_2(2a - x_1) - y_1 = 0$$

$$\therefore\ t_2(2a - x_1) = y_1 - at_2^3$$

$$\therefore\ t_2^3(2a - x_1)^3 = (y_1 - at_2^3)^3$$

$$\therefore\ -\frac{2y_1}{a}(2a - x_1)^3 = (y_1 + 2y_1)^3$$

$\therefore$ P (x_1, y_1) ನ ಪಥಸಮೀಕರಣವು

$$27ay^2 = 2(x - 2a)^3$$

(3) ಲಂಬಜ್ಯಾಗಳ ಧ್ರುವಗಳ ಪಥಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

't' ಯಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬಜ್ಯಾದ ಸಮೀಕರಣವು

$tx + y - 2at - at^3 = 0$ ಆಗಿದೆ. ಇದರ ಧ್ರುವ P (x_1, y_1) ಎಂದಿದ್ದರೆ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವೂ

$$S_1 \equiv 2ax - y_1 y + 2ax_1 = 0$$

ಸಮೀಕರಣವೂ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿವೆ.

$$\therefore\ \frac{2a}{t} = -\frac{y_1}{1} = \frac{-2x_1}{2t + t^3}$$

$$\therefore\ t = -\frac{2a}{y_1},\quad y_1(2t + t^3) = 2x_1$$

t ಯನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ P ಯ ಪಥಸಮೀಕರಣವು

$$y^2(x + 2a) + 4a^3 = 0$$

(4) P ಚರಬಿಂದು $lx + my + n = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಚಲಿಸುವುದು. P ಯ ಧ್ರುವೀಯವು ಪೆರಾಬೋಲಾವನ್ನು Q. R ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು. QR ಜ್ಯಾದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಪಥಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

QR ನ ಮಧ್ಯಬಿಂದು T (x_1, y_1) ಎಂದಿರಲಿ.

$\therefore$ QR ಸಮೀಕರಣವು

$$S_1 - S_{11} \equiv 2ax - y_1 y + y_1^2 - 2ax_1 = 0 \quad (1)$$

ಇದರ ಧ್ರುವವು $P(x_2, y_2)$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore\ 2ax - y_2 y + 2ax_2 = 0$ ಮತ್ತು ಸಮೀಕರಣ (1) ಸರ್ವಸಮವಾಗಿವೆ.

$$\therefore\ y_2 = y_1$$

$$x_2 = \frac{y_1^2 - 2ax_1}{2a}$$

$P(x_2, y_2)$ ಬಿಂದು $lx + my + n = 0$ ಮೇಲಿದೆ.

$$\therefore\ lx_2 + my_2 + n = 0$$

$$\therefore\ l\frac{(y_1^2 - 2ax_1)}{2a} + my_1 + n = 0$$

$\therefore$ T ಯ ಪಥಸಮೀಕರಣವು

$l(y^2 - 2ax) + 2a(my + n) = 0$ ಅಥವಾ

$l(y^2 - 4ax) + 2a(lx + my + n) = 0$

6.5 ಪೆರಾಬೊಲಾ ಮತ್ತು ವೃತ್ತ—

$y^2 = 4ax$ ಪೆರಾಬೊಲಾಕ್ಕೂ

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ಎಂಬ ಸಾಮಾನ್ಯವೃತ್ತಕ್ಕೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಪ್ರಾಚಲ t ಎಂದಿರಲಿ.

$$\therefore\ a^2t^4 + 4a^2t^2 + 2gat^2 + 4fat + c = 0$$

ಇದು t ಯಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಘಾತದ ಸಮೀಕರಣ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಪೆರಾಬೊಲಾ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುವು. ಇಂತಹ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳ ಒಂದು ಗಣವನ್ನು ಚಕ್ರೀಯಬಿಂದುಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಪ್ರಾಚಲಗಳು ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು. ಇವು t_1, t_2, t_3, t_4 ಆಗಿದ್ದರೆ,

$$\Sigma t_1 = 0$$

$$\Sigma t_1t_2 = \frac{2(2a + g)}{a}$$

$$\Sigma t_1t_2t_3 = -\frac{4f}{a}$$

$$t_1t_2t_3t_4 = \frac{c}{a^2}$$

$$\therefore\ 2at_1 + 2at_2 + 2at_3 + 2at_4 = 0$$

∴ ಒಂದು ಪೆರಾಬೊಲಾ ಮತ್ತು ಒಂದು ವೃತ್ತಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯಬಿಂದುಗಳ y–ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಬೈಜಿಕ ಮೊತ್ತ ಶೂನ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಈ ಸಾಮಾನ್ಯಬಿಂದುಗಳು A, B, C, D ಎಂದಿದ್ದರೆ,

$$\text{AB ಯ ಓಟ} = \frac{2}{t_1 + t_2}$$

$$\text{CD ಯ ಓಟ} = \frac{2}{t_3 + t_4} = -\frac{2}{t_1 + t_2}$$

∴ AB, CD ಗಳು x–ಅಕ್ಷವನ್ನು ಕುರಿತು ಸಮಾನವಾಗಿ ಬಾಗಿಕೊಂಡಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ

(1) PSQ ಒಂದು ನಾಭೀಜ್ಯಾ. SP. ಅರ್ಧನಾಭೀಲಂಬ ಮತ್ತು SQ ಹರಾತ್ಮಕ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

P, Q ಗಳು t_1, t_2 ಎಂದಿದ್ದರೆ, $t_1 t_2 + 1 = 0$

PM, QM′ ಚಾಲಕದ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳಾದರೆ,

SP = PM, SQ = QM′

$$\therefore\ \frac{1}{SP} + \frac{1}{SQ} = \frac{1}{PM} + \frac{1}{QM'} = \frac{1}{a + at_1^2} + \frac{1}{a + at_2^2}$$

$$= \frac{2 + t_1^2 + t_2^2}{a(1 + t_1^2 + t_2^2 + t_1^2 t_2^2)} = \frac{1}{a}$$

$$= \frac{2}{2a} = \frac{2}{(\text{ಅರ್ಧನಾಭೀಲಂಬ})}$$

(2) P ಯು ಪೆರಾಬೋಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು. PM ಚಾಲಕದ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ. PT ಸ್ಪರ್ಶಕವು ∠ SPM ನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವುದು.

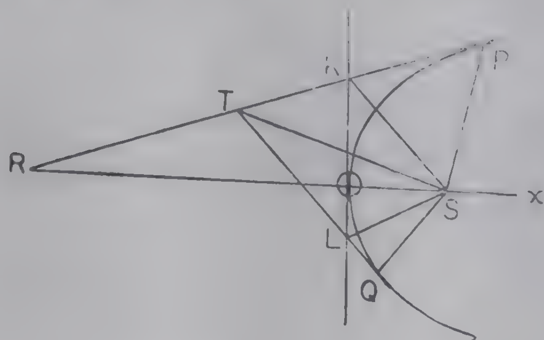
ಚಿತ್ರ 6.2 ರಲ್ಲಿ, SP = PM : ∠ PSK = ∠ PMK = $\frac{\pi}{2}$ ಮತ್ತು PK ಯು △ PSK ಮತ್ತು △ PMK ಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವೆರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿವೆ.

∴ ∠ KPS = ∠ KPM

∴ P ಯಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ∠ SPM ನ ಇನ್ನೊಂದು ದ್ವಿಭಾಜಕವಾಗಿದೆ.

ಸೂಚನೆ: $ST = SP$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದರೆ $\angle TPS = \angle PTS$
$= \angle TPM$ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯುವುದು.

(3) P, Q ಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು T ಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಆಗ $\triangle$s TPS ಮತ್ತು TQS ಸಮರೂಪವಾಗಿವೆ. ಮತ್ತು $SP.SQ = ST^2$ ಅಲ್ಲದೇ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ನಾಭಿಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.



ಚಿತ್ರ 6.4

T, K, S, L ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿವೆ.

$\therefore \angle STL = \angle SKL$. SK ಯು PR ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ,

$\angle SKL = \angle KRL$

$= \angle SPR$

$\therefore \angle STQ = \angle SPT$

ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ, $\angle STP = \angle SQT$

$\therefore \triangle$s SPT ಮತ್ತು SQT ಗಳಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ಕೋನಗಳು PST ಮತ್ತು QST ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

$\therefore \triangle$s SPT, STQ ಸಮರೂಪವಾಗಿವೆ.

$$\therefore \frac{SP}{ST} = \frac{PT}{TQ} = \frac{TS}{QS}$$

$$\therefore SP.SQ = ST^2; \quad \frac{SP}{SQ} = \left(\frac{PT}{QT}\right)^2$$

(4) $y^2 = 4ax$ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಒಂದು ಜ್ಯಾ ಶೃಂಗದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನ ವನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತದೆ. ಆ ಜ್ಯಾದ ಕೊನೆಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು $x + 4a = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸಂಧಿಸುವುವು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು $P(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಆಗ ಜ್ಯಾದ ಸಮೀಕರಣವು $yy_1 = 2a(x + x_1)$. ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಸಹಾಯದಿಂದ $y^2 = 4ax$ ನ್ನು ಸಮಾನಘಾತದ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$y^2 = 4ax.1 = 4ax.\left(\frac{yy_1 - 2ax}{2ax_1}\right)$$

$$x_1y^2 = 2xyy_1 - 4ax^2$$

$$\therefore\ 4ax^2 - 2y_1xy + x_1y^2 = 0$$

ಇದು ಜ್ಯಾದ ಕೊನೆಗಳನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವಿಗೆ (ಶೃಂಗಕ್ಕೆ) ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಒಟ್ಟಾದ ಸಮೀಕರಣ. ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ $\frac{\pi}{2}$ ಆಗಿದೆ.

$$\therefore\ 4a + x_1 = 0$$

$\therefore$ $P(x_1, y_1)$ ನ ಪಥವು $x + 4a = 0$ ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 6.1

1 $y^2 = 4ax$ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಲಂಬಜ್ಯಾಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ಪಥ $\frac{y^2}{2a} + \frac{4a^2}{y^2} = x - 2a$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

2 ಒಂದು ದತ್ತಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಎಲ್ಲ ಜ್ಯಾಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳ ಪಥ ಒಂದು ಪೆರಾಬೊಲಾವೆಂದೂ ಇದರ ನಾಭೀಲಂಬವು ದತ್ತ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ನಾಭೀಲಂಬದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿದೆಯೆಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ.

3 ಒಂದು ಚರಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಮೂರು ಲಂಬಗಳ ಪೈಕಿ ಎರಡು ಐಕ್ಯವಾದರೆ ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ

$27ay^2 = 4(x - 2a)^3$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

4 P 't' ಯಿಂದ $y^2 = 4ax$ ಗೆ ಮೂರು ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಈ ಮೂರು ಲಂಬಪಾದಗಳ ಪರಿವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು

$x^2 + y^2 - a\left(1 + \frac{t^2}{2}\right)x - aty = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

5 ಚಾಲಕದ ಮೇಲೆ l ಸ್ಥಿರರೇಖಾಂತರ ರಚಿಸುವ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಛೇದನಬಿಂದುಪಥ

$(y^2 - 4ax)(x + a)^2 = l^2x^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

6 ಒಂದು ವೃತ್ತ $y^2 = 4ax$ ಪೆರಾಬೊಲಾವನ್ನು ಲಂಬ ಕೋನದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು ಮತ್ತು ನಾಭಿಯ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದು. ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದ ಪಥ $y^2(a + 2x) = a(a + 3x)^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

7 ಪರಸ್ಪರ α ಕೋನದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಛೇದನಬಿಂದುವಿನ ಪಥ $(y^2 - 4ax)\cos^2\alpha = (x + a)^2 \sin^2\alpha$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ಆದಾಗಿನ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

8 P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $y^2 = 4ax$ ಗೆ ಎಳೆದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು P ಯ ನಾಭೀದೂರ ಮತ್ತು ನಾಭೀಲಂಬಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. P ಯ ಪಥ $y^2 = 4a(x + a)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

9 $y^2 = 4ax$ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಒಂದು ಜ್ಯಾವು $y^2 = 4bx$ ಪೆರಾಬೊಲಾವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಜ್ಯಾದ ಕೊನೆಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಛೇದನಬಿಂದುವಿನ ಪಥ $by^2 = 4a^2x$ ಎಂದೂ ಲಂಬಗಳ ಛೇದನಬಿಂದುವಿನ ಪಥ $(4a - b)^3 y^2 = 4b^2(x-2a)^3$ ಎಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ.

10 $y^2 = 4ax$ ಮೇಲಿರುವ P, Q ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು (α, β) ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುವು. PQ ಸರಳರೇಖೆ ಮತ್ತು P, Q ಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು $(x - 2a + \alpha)^2 + 4\beta y = 0$ ಪೆರಾಬೊಲಾವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುವು ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

11 (α, β) ದಿಂದ $y^2 = 4ax$ ಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಜ್ಯಾದ ಉದ್ದ
$\sqrt{(\beta^2 - 4a\alpha)(\beta^2 + 4a^2)} \div a$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

12 ಒಂದು ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಮೂರು ಲಂಬಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾದರೆ, ಆ ಲಂಬಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ರಚಿಸುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಪರಿವೃತ್ತವು ಶೃಂಗದ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

13 P, Q, R ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು. PQR ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬಕೇಂದ್ರವು ನಾಭಿ S ಆಗಿದೆ. ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ಅಕ್ಷವನ್ನು P′, Q′, R′ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುವು.
$SP'.SQ'.SR' + 4\,SO^2 = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

14 $\left.\begin{array}{l} x = a_1 t^2 + 2b_1 t + c_1 \\ y = a_2 t^2 + 2b_2 t + c_2 \end{array}\right\}$ ಈ ಪ್ರಾಚಲಸಮೀಕರಣಗಳು ಒಂದು ಪೆರಾಬೊಲಾವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಇದರ ಮೇಲಿರುವ t_1, t_2, t_3 ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾದರೆ,

$$t_1 + t_2 + t_3 = -3\,\frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2)}{a_1^2 + a_2^2}$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

15 $\left.\begin{array}{l} x = at + bt^2 \\ y = ct + dt^2 \end{array}\right\}$ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಮೇಲಿರುವ t_1, t_2 ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಜ್ಯಾದ ಸಮೀಕರಣ

$$\begin{vmatrix} x & y & t_1 t_2 \\ a & c & t_1 + t_2 \\ b & d & -1 \end{vmatrix} = 0$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

16 ವಿಸ್ತರಿಸಿದ ನಾಭೀಲಂಬದ ಮೇಲೆ, ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಸಂಧಿಸುವುವು. ಅಕ್ಷದೊಡನೆ ಅವು ರಚಿಸುವ ಕೋನಗಳ (ಬಾಗುಗಳ) ಮೊತ್ತ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

17 $y^2 = 4ax$ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಜೊತೆ ಲಂಬಗಳ ಛೇದನಬಿಂದುವಿನ ಪಥ $y^2 = a(x - 3a)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

18 PQ ಎಂಬ ಒಂದು ಜ್ಯಾದ ಓಟವು ಸ್ಥಿರವಾಗಿದೆ. P, Q ಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಒಂದು ಲಂಬದ ಮೇಲೆ ಛೇದಿಸುವುವು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

19 $y^2 = 4ax$ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಜ್ಯಾಗಳು $y^2 = 4bx$ ಪೆರಾಬೊಲಾವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದಾದರೆ, ಆ ಜ್ಯಾಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ಪಥವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

20 ಒಂದು ಜ್ಯಾದ ಕೊನೆಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಮೇಲೆ ಸಂಧಿಸಿದರೆ, ಆ ಜ್ಯಾದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಪಥವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

21 PQ ವು $y^2 = 4ax$ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಒಂದು ಜ್ಯಾ. ಅದು ಅಕ್ಷವನ್ನು R ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು. $PQ^2 = OP^2 + OQ^2 + 2RT^2 - 2OR^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ O ಶೃಂಗ (ಮೂಲಬಿಂದು), RT ಯು R ಮೂಲಕ ಎಳೆದ y–ನಿರ್ದೇಶಕ.

22 P, Q, R, S ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳು. R ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ವ್ಯಾಸವನ್ನು PQ, R′ ನಲ್ಲಿಯೂ, Q ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ವ್ಯಾಸವನ್ನು RS, Q′ ನಲ್ಲಿಯೂ ಸಂಧಿಸುವುವು: Q′R′ ಮತ್ತು PS ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

23 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$ ಬಿಂದುಗಳು $y^2 = 4ax$ ಪೆರಾಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸ್ಪಾನುವರ್ತಿ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತವೆ. △ PQR ನ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು $(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)(y_1 - y_2) \div 4a$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

24 $lx + my + n = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯು $y^2 = 4ax$ ಪೆರಾಬೊಲಾವನ್ನು P, Q ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು. PS, QS (S ≡ ನಾಭಿ) ಪೆರಾಬೊಲಾವನ್ನು ಪುನಃ P′, Q′, ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಿದರೆ, P′ Q′ ನ ಸಮೀಕರಣ

$nx - my + la = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

25 $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ಮತ್ತು $y^2 = 4ax$ ಇವುಗಳ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾ $lx + my = 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಇನ್ನೊಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾವು $lc^2 x - (2f + mc) y - c = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

26 $lx + my + n = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯು $y^2 = 4ax$ ನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಪೆರಾಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳ ಛೇದನಬಿಂದು

$\left(\frac{2al^2 + 4am^2 - nl}{l^2}, \frac{2mn}{l^2}\right)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

27 ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೂ, ಒಂದು ಪೆರಾಬೊಲಾಕ್ಕೂ ಇರುವ ನಾಲ್ಕು ಸಾಮಾನ್ಯಬಿಂದುಗಳ ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರವು ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

28 ಒಂದೇ ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಚಾಲಕ ಇರುವ ಎರಡು ಪೆರಾಬೊಲಾಗಳಿವೆ. ಅಕ್ಷ, ಚಾಲಕಗಳು X ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುವು. ಮೊದಲನೆಯ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಶೃಂಗ A ಮತ್ತು ನಾಭಿ S. ಎರಡನೆಯ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಶೃಂಗ S. ಎರಡು ಪೆರಾಬೊಲಾಗಳ ಒಂದು ಛೇದನಬಿಂದು P. PM ನ್ನು ಚಾಲಕಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. $AP^2 = 4AX.AM$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

29 A ಯು ಶೃಂಗವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಮೇಲೆ P ಯು ಒಂದು ಚರಬಿಂದು. Q, R ಗಳು P ಯಿಂದ ಎಳೆದ ಲಂಬಪಾದಗಳು. QR ಒಂದು ಸ್ಥಿರಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದೆಂದೂ, AP, QR ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸರಳರೇಖೆಯಮೇಲೆ ಸಂಧಿಸುವುವೆಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ.

30 ಒಂದು ಸ್ಥಿರಸರಳರೇಖೆಯು ಒಂದು ದತ್ತ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಚಾಲಕವನ್ನು F ನಲ್ಲಿಯೂ F ನ ಧ್ರುವೀಯವನ್ನು F′ ನಲ್ಲಿಯೂ ಸಂಧಿಸುವುದು. ಈ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದೊಂದು ಜೊತೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಆರಿಸಲಾಗಿದೆ: ಇಂತಹ ಬಿಂದುಯುಗ್ಮಗಳಿಂದ ಪೆರಾಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ ಸಮಾನ ಅಥವಾ ಪೂರಕ (Supplementary) ಆಗಿರುವಂತೆ ಈ ಆರಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಬಿಂದುಯುಗ್ಮಗಳು FF′ ನ್ನು ಹರಾತ್ಮಕವಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುವುವು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಏಳನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯ

ದೀರ್ಘವೃತ್ತ

7.1 ಕೆಲವು ಪ್ರಮುಖರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು—

$S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣವು ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. $[b^2 = a^2(1 - e^2)]$

(*a*) $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ಎಂಬ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಜ್ಯಾದ ಸಮೀಕರಣವು

$$S_1 + S_2 = S_{12}$$

$$\left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1\right) + \left(\frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} - 1\right) = \frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2} - 1$$

(*b*) $P(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವು $S_1 = 0$

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0$$

(*c*) $P(x_1, y_1)$ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಆಗಿರುವ ಜ್ಯಾದ ಸಮೀಕರಣ $S_1 = S_{11}$

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1$$

(*d*) $P(x_1, y_1)$ ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಪರ್ಶಕಜ್ಯಾ ಮತ್ತು ಧ್ರುವೀಯ $S_1 = 0$

(*e*) $P(x_1, y_1)$ ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣವು $SS_{11} = S_1^2$

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right) = \left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1\right)^2$$

7.2 ದೀರ್ಘವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಸರಳರೇಖೆ—

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವೂ

$y = mx + c$ ಸರಳರೇಖೆಯೂ ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ x, y ಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+c)^2}{b^2} = 1$$

$$(a^2m^2 + b^2)\,x^2 + 2\,ma^2c\,x + a^2c^2 - a^2b^2 = 0$$

ಇದು x ನಲ್ಲಿ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಮತ್ತು ದೀರ್ಘವೃತ್ತ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುವು. ಈ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಶೋಧಕವು ಶೂನ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಸರಳರೇಖೆಯು ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿರುವುದು.

$$\therefore\ \triangle = 4m^2c^2a^4 - 4\,(b^2 + a^2m^2)\,(a^2c^2 - a^2b^2) = 0$$

$$\therefore\ c^2 = a^2m^2 + b^2 \qquad (7.1)$$

$\therefore$ m ನ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ, $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾಗಿವೆ. ಅಂದರೆ, ಒಂದು ದತ್ತ ಬೆಲೆ m ಗೆ ಅನುರೂಪವಾಗಿ,

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

$$y = mx - \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

ಎಂಬ ಎರಡು ಸಮಾನಾಂತರ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ದೊರೆಯುವುವು. ಇವುಗಳ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಜ್ಯಾವು ಒಂದು ವ್ಯಾಸವೆಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

7.3 ನಿಯಾಮಕ ವೃತ್ತ—

$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ ಎಂಬ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವು $P\,(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗಲಿ. ಇದರ ನಿಯಮ,

$$y_1 = mx_1 + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

$$\therefore\ (y_1 - mx_1)^2 = a^2m^2 + b^2$$

$$\therefore\ (x_1^2 - a^2)\,m^2 - 2x_1y_1\,m + y_1^2 - b^2 = 0$$

ಇದು m ನಲ್ಲಿ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಂದು ದತ್ತಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಸಾಗುವುವು.

$P\,(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ $\frac{\pi}{2}$ ಆಗಿದ್ದರೆ,

$m_1m_2 = -1$, m_1, m_2 ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಓಟಗಳು. ಅವು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳೂ ಹೌದು.

$$\therefore\ m_1m_2 = \frac{y_1^2 - b^2}{x_1^2 - a^2} = -1$$

$\therefore$ P (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \tag{7.2}$$

ಇದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದೊಡನೆ ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯವೃತ್ತವಾಗಿದೆ. ಇದರ ತ್ರಿಜ್ಯ $= \sqrt{a^2 + b^2}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ ಒಂದು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತವಾಗಿದೆ. ಇದರ ಹೆಸರು ನಿಯಾಮಕವೃತ್ತ.

ಉದಾಹರಣೆ

(1) ನಿಯಾಮಕವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಇನ್ನೊಂದು ಕ್ರಮ.

P (x_1, y_1) ಚರಬಿಂದುವಿನ ಒಂದು ಸ್ಥಾನವಾಗಿರಲಿ. P ಯಿಂದ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣವು

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right) = \left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1\right)^2$$

ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ $\frac{\pi}{2}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right) + \frac{1}{b^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right) - \frac{x_1^2}{a^4} - \frac{y_1^2}{b^4} = 0$$

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2 + b^2$$

$\therefore$ P (x_1, y_1) ರ ಪಥವು

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \tag{7.2}$$

(2) ಲಂಬಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸ್ಪರ್ಶಕಜ್ಯಾದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಪಥವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮಧ್ಯಬಿಂದು P (x_1, y_1) ಎಂದಿರಲಿ. ಜ್ಯಾದ ಸಮೀಕರಣವು

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \tag{1}$$

ಈ ಜ್ಯಾವು Q (x_2, y_2) ರಿಂದ ಎಳೆದ ಲಂಬ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸ್ಪರ್ಶಕಜ್ಯಾ ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore \frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} = 1 \tag{2}$$

(1) ಮತ್ತು (2) ಸರ್ವಸಮವಾಗಿವೆ.

$$\therefore\ \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=\lambda$$ ಎಂದಿರಲಿ.

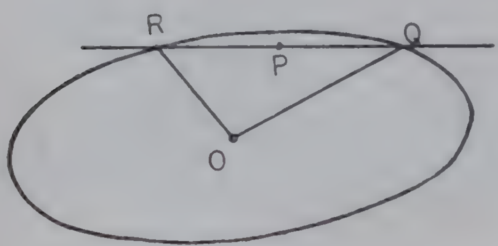
Q (x_2, y_2) ನಿಯಾಮಕ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿದೆ.

$$\therefore\ x_2^2+y_2^2=a^2+b^2$$

$$\therefore\ \left(\frac{x_1}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{y_1}{\lambda}\right)^2=a^2+b^2$$

$\therefore$ P (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+b^2}=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2$$



ಚಿತ್ರ 7.1

(3) ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವಂತಹ ಜ್ಯಾಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ಪಥವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮಧ್ಯಬಿಂದು P (x_1, y_1) ಎಂದಿರಲಿ. ಜ್ಯಾದ ಸಮೀಕರಣವು

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}$$

ಇದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು Q, R ಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. $\angle QOR=\frac{\pi}{2}$ ಎಂದು ದತ್ತವಾಗಿದೆ. ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು QR ನ ಸಮೀಕರಣದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಮಾನಘಾತಿಸಬೇಕು.

$$\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=\left(\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}\right)^2$$

ಇದು OQ, OR ಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ. $\angle QOR=\frac{\pi}{2}$ ಆಗಿರಬೇಕಾದರೆ ನಿಯಮವು

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)^2-\frac{x_1^2}{a^4}-\frac{y_1^2}{b^4}=0$$

$\therefore$ P (x_1, y_1) ರ ಪಥವು

$$(a^2+b^2)(b^2x^2+a^2y^2)^2-(a^2x^2+b^2y^2)=0$$

(4) $lx + my + n = 0$, $l'x + m'y + n' = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿರೇಖೆಗಳಾಗಿರಲು ನಿಯಮ.

$lx + my + n = 0$ ಯ ಧ್ರುವ $P(x_1, y_1)$ ಎಂದಿರಲಿ.

$$\therefore \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0 \text{ ಮತ್ತು } lx + my + n = 0$$

ಸರ್ವಸಮವಾಗಿವೆ.

$$\therefore \frac{x_1}{a^2l} = \frac{y_1}{b^2m} = -\frac{1}{n}$$

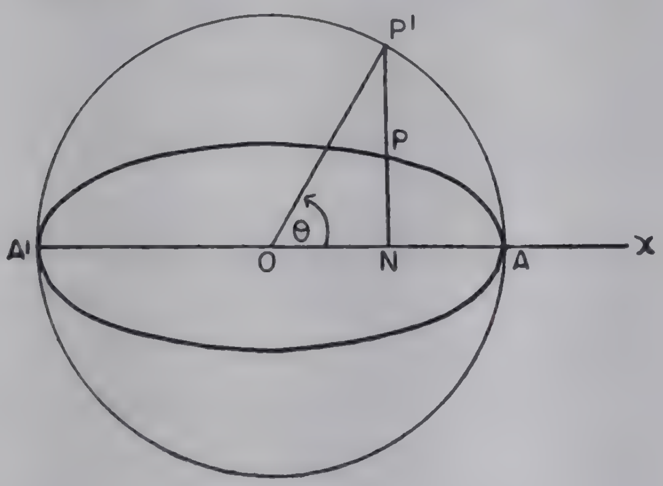
$$\therefore x_1 = -\frac{a^2l}{n}, \quad y_1 = \frac{-b^2m}{n}$$

P ಯು $l'x + m'y + n' = 0$ ಮೇಲೆ ಇದೆ.

$$\therefore a^2ll' + b^2mm' = nn' \qquad (7.3)$$

ಇದು ಬೇಕಾದ ನಿಯಮ.

7.4 ಉತ್ಕೇಂದ್ರ ಕೋನ ಮತ್ತು ಉಪವೃತ್ತ—



ಚಿತ್ರ 7.2

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ಯ ದೀರ್ಘಾಕ್ಷವು ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ (AA′) ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು. ಇದರ ಸಮೀಕರಣ $x^2 + y^2 = a^2$. ಈ ವೃತ್ತದ

ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಪ್ರಾಚಲ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{array}\right\} \text{ ಆಗಿವೆ.}$$

P′ ಇಂತಹ ಒಂದು ಬಿಂದು. P′ ನಿಂದ P′N ನ್ನು ದೀರ್ಘಾಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಇದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು P ಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಆಗ P ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ($a\cos\theta$, NP) ಆಗಿವೆ. P ಯು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿದೆ.

$$\therefore \frac{a^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{NP^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore NP = \pm b\sin\theta$$

$0 < \theta < \pi$ ಆಗಿರುವಾಗ $NP > 0$ ಆಗಿದೆ.

$\pi < \theta < 2\pi$ ಆಗಿರುವಾಗ $NP < 0$ ಆಗಿದೆ.

$\therefore NP = + b\sin\theta$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

P′ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಚಲಿಸಿದಂತೆ (ಅಂದರೆ θ ದ ಬೆಲೆ 0 ಯಿಂದ ತೊಡಗಿ 2π ಗೆ ಏರಿದಂತೆ) P ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಚಲಿಸುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ θ ದ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ, P($a\cos\theta$, $b\sin\theta$) ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವುದು.

$$\therefore \left.\begin{array}{l} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{array}\right\} \text{ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಪ್ರಾಚಲ ಸಮೀಕರಣಗಳು.} \quad (7.4)$$

θ ಪ್ರಾಚಲ. θ ಕೋನವನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನ ಉತ್ಕೇಂದ್ರಕೋನವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಸಹಾಯಕವಾಗಿರುವ $x^2 + y^2 = a^2$ ನ್ನು ಉಪವೃತ್ತವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

P, P′ ಗಳನ್ನು ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಬಿಂದುಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅವು ದೀರ್ಘಾಕ್ಷದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿವೆ ಎಂಬುದು ಗಮನಾರ್ಹ.

POQ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಒಂದು ವ್ಯಾಸವಾಗಿರಲಿ. P ಯು ($a\cos\theta$, $b\sin\theta$) ಆಗಿದ್ದರೆ, Q ವು ($-a\cos\theta$, $-b\sin\theta$) ಆಗಿರುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ Q ವಿನ ಉತ್ಕೇಂದ್ರಕೋನ $\theta + \pi$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ, ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜೊತೆ ವ್ಯಾಸೀಯ ವಿರೋಧ ಬಿಂದುಗಳ ಉತ್ಕೇಂದ್ರಕೋನಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ π (ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ π ಯ ವಿಷಮಗುಣಕ) ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ

(1) 'θ', 'ϕ' ಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಜ್ಯಾದ ಸಮೀಕರಣ.

ಆ ಬಿಂದುಗಳು $P(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ ಮತ್ತು $Q(a\cos\phi,\ b\sin\phi)$ ಎಂದಿರಲಿ. PQ ವಿನ ಸಮೀಕರಣವು

$$\frac{x - a\cos\theta}{a(\cos\theta - \cos\phi)} = \frac{y - b\sin\theta}{b(\sin\theta - \sin\phi)}$$

ಇದರ ಸರಳೀಕೃತ ರೂಪ

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\theta+\phi}{2} + \frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\phi}{2} = \cos\frac{\theta-\phi}{2}$$

$\phi = \theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ 'θ' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವು ದೊರೆಯುವುದು. ಅದು

$$\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$$

$S_1 = 0$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $x_1 = a\cos\theta,\ y_1 = b\sin\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ ಇದೇ ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುವುದೆಂದು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

(2) θ, ϕ ಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು.

ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು $\frac{x\cos\theta}{a} + \frac{y\sin\theta}{b} = 1$

$$\frac{x\cos\phi}{a} + \frac{y\sin\phi}{b} = 1$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ x, y ಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಛೇದನ ಬಿಂದುವು

$$\left[\frac{a\cos\frac{\theta+\phi}{2}}{\cos\frac{\theta-\phi}{2}},\ \frac{b\sin\frac{\theta+\phi}{2}}{\cos\frac{\theta-\phi}{2}}\right]$$

ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

(3) ನಾಭಿಗಳಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ ಪಾದಗಳ ಪಥ.

ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕ $y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ ಎಂದಿರಲಿ.

$S(ae, 0)$ ಯಿಂದ ಇದರ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು

$y = -\frac{1}{m}(x - ae)$ ಆಗಿದೆ.

ಲಂಬಪಾದದ ಪಥದ ಸಮೀಕರಣ ಪಡೆಯಲು ಈ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ m ನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಬೇಕು.

$$(y - mx)^2 + (my + x)^2 = a^2m^2 + b^2 + a^2e^2$$

$$(x^2 + y^2)(1 + m^2) = a^2(1 + m^2), \quad \because \; b^2 = a^2(1 - e^2)$$

$\therefore$ ಪಥ ಸಮೀಕರಣವು $x^2 + y^2 = a^2$

ಇದು ಉಪವೃತ್ತ.

$\therefore$ ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಿಗೆ ಅದರ ನಾಭಿಗಳಿಂದ ಎಳೆದ ಲಂಬಪಾದಗಳ ಪಥವು ಉಪವೃತ್ತವಾಗಿದೆ.

(4) ನಾಭಿಗಳಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಲಂಬ ದೂರಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ.

ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕ $y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ ಎಂದಿರಲಿ.

S $(ae, 0)$, S′ $(-ae, 0)$ ಗಳಿಂದ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು SM, S′M′ ಆಗಿದ್ದರೆ,

$$SM = \frac{mae + \sqrt{a^2m^2 + b^2}}{\sqrt{1 + m^2}}$$

$$S'M' = \frac{-mae + \sqrt{a^2m^2 + b^2}}{\sqrt{1 + m^2}}$$

$$\therefore \quad SM.S'M' = \frac{a^2m^2 + b^2 - m^2a^2e^2}{1 + m^2}$$

$$= \frac{m^2b^2 + b^2}{1 + m^2} = b^2$$

$\therefore$ ನಾಭಿಗಳಿಂದ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಲಂಬದೂರಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷದ ಅರ್ಧದ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.

7.5 ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಲಂಬ, ಸಹಲಂಬ ಬಿಂದುಗಳು—P (x_1, y_1) ಬಿಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರಲಿ. P ಯಲ್ಲಿ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣವು

$$y - y_1 = -\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(x_1, y_1)} (x - x_1)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \; \therefore \frac{dx}{dy} = -\frac{ya^2}{xb^2}$$

$\therefore$ ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣವು $y - y_1 = +\dfrac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1)$

ಅಥವಾ, $\dfrac{a^2x}{x_1} - \dfrac{b^2y}{y_1} = a^2 - b^2$ (7.5)

$\therefore$ $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬವು

$\dfrac{ax}{\cos\theta} - \dfrac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2$ ಆಗಿದೆ. (7.6)

ಈ ಲಂಬವು ಒಂದು ದತ್ತ ಬಿಂದು $Q(h, k)$ ಮೂಲಕ ಸಾಗಲಿ.

$$\therefore \frac{ah}{\cos\theta} - \frac{bk}{\sin\theta} = a^2 - b^2$$

$\tan\dfrac{\theta}{2} = t$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, ಈ ಸಮೀಕರಣವು,

$\dfrac{ah(1+t^2)}{1-t^2} - \dfrac{bk(1+t^2)}{2t} = a^2 - b^2$ ಎಂದಾಗುವುದು.

$$\therefore\ bk\,t^4 + 2(ah + a^2 - b^2)t^3 + 2(ah - a^2 + b^2)t - bk = 0$$

ಇದು t ಯಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಘಾತದ ಸಮೀಕರಣ. $\therefore$ ಇದಕ್ಕೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನಾಲ್ಕು ಮೂಲಗಳಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ದತ್ತಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ನಾಲ್ಕು ಲಂಬಗಳು ಸಾಗುವುವು. ಇಂತಹ ಲಂಬ ಪಾದಗಳನ್ನು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಸಹಲಂಬಬಿಂದುಗಳ ಒಂದು ಗಣ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು t_1, t_2, t_3, t_4 ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, $t_1 = \tan\dfrac{\theta_1}{2}$. ಇತ್ಯಾದಿ. ಇಲ್ಲಿ θ_1 ಒಂದು ಲಂಬ ಪಾದದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರ ಕೋನವಾಗುವುದು.

$$\therefore\ \Sigma t_1 = -\frac{2(ah + a^2 - b^2)}{bk}$$

$$\Sigma t_1 t_2 = 0$$

$$\Sigma t_1 t_2 t_3 = -\frac{2(ah - a^2 + b^2)}{bk}$$

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = -1$$

$$\tan\left(\frac{\theta_1}{2}+\frac{\theta_2}{2}+\frac{\theta_3}{2}+\frac{\theta_4}{2}\right)=\frac{\Sigma t_1-\Sigma t_1 t_2 t_3}{1-\Sigma t_1 t_2+t_1 t_2 t_3 t_4}$$

$$=\frac{\text{ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಶೂನ್ಯ}}$$

$$\therefore \frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}{2}=\frac{\pi}{2} \text{ ರ ವಿಷಮ ಅಪವರ್ತ್ಯ}$$

$$=(2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \text{ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ}$$

$$\therefore\ \theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=(2n+1)\pi,\ n\in \mathrm{I} \qquad (7.7)$$

$\therefore$ ಒಂದು ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನ ಸಹ ಲಂಬ ಬಿಂದುಗಳ ಉತ್ಕೇಂದ್ರ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ π ಯ ಒಂದು ವಿಷಮ ಅಪವರ್ತ್ಯ.

ಉದಾಹರಣೆ

(1) α, β, γ ಉತ್ಕೇಂದ್ರಕೋನಗಳಾಗಿರುವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾದರೆ $\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)+\sin(\alpha+\beta)=0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

α, β, γ ಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು $Q(h, k)$ ಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. Q ನಿಂದ ಎಳೆದ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಲಂಬದ ಪಾದದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರಕೋನ δ ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$$\sum \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}=0 \text{ ಮತ್ತು } \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\delta}{2}=1$$

ಇವೆರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ $\tan\frac{\delta}{2}$ ನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಬೇಕು.

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2}$$

$$+\tan\frac{\delta}{2}\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\right)=0 \text{ ಎಂದು}$$

ಮೊದಲಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು. $\tan\frac{\delta}{2}$ ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ,

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}-\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}=0$$

$$\therefore \sum \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = 0$$

$$\therefore \frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} + \frac{\cos\beta+\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} + \frac{\cos\gamma+\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha} = 0$$

$$\therefore \sin(\alpha+\beta) + \sin(\beta+\gamma) + \sin(\gamma+\alpha) = 0$$

(2) A, B, C, D ಗಳು ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಸಹಲಂಬ ಬಿಂದುಗಳ ಒಂದು ಗಣ. AB ಯ ಸಮಿಾಕರಣ $lx+my-1=0$ ಎಂದಿದ್ದರೆ CD ಯ ಸಮಿಾಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸಹಲಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು P(h, k) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. P ಯಿಂದ ಎಳೆದ ಒಂದು ಲಂಬಪಾದವು (x_1, y_1) ಎಂದಿದ್ದರೆ ಈ ಲಂಬದ ಸಮಿಾಕರಣವು $\frac{a^2x}{x_1} - \frac{b^2y}{y_1} = a^2 - b^2$

ಇದು P(h, k) ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದು.

$$\therefore \frac{a^2h}{x_1} - \frac{b^2k}{y_1} = a^2 - b^2$$

∴ P ಯಿಂದ ಎಳೆದ ನಾಲ್ಕು ಲಂಬಪಾದಗಳು

$\frac{a^2h}{x} - \frac{b^2k}{y} = a^2 - b^2$ ಅಥವಾ

$(a^2-b^2)xy + b^2kx - a^2hy = 0$ ವಕ್ರರೇಖೆ ಮತ್ತು

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತ ಇವುಗಳ ಮೇಲೆ ಇವೆ.

∴ A, B, C, D ಬಿಂದುಗಳು ಈ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ನಾಲ್ಕು ಛೇದನಬಿಂದುಗಳು.

ಈಗ AB ಯ ಸಮಿಾಕರಣ $lx+my-1=0$

CD ಯ ಸಮಿಾಕರಣ $l'x+m'y-1=0$ ಎಂದಿರಲಿ.

$$\therefore \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + \lambda(lx+my-1)(l'x+m'y-1) = 0$$

ಎಂಬ ಸಮಿಾಕರಣವು λ ದ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ A, B, C. D ಗಳ ಮೂಲಕ

ಸಾಗುವ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ λ ದ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗೆ ಇದು

$(a^2 - b^2)xy + b^2kx - a^2hy = 0$ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಬೇಕು.

$$\therefore \; \lambda ll' + \frac{1}{a^2} = 0, \; \lambda\, mm' + \frac{1}{b^2} = 0 \text{ ಮತ್ತು } -1 + \lambda = 0$$

$$\therefore \; \lambda = 1, l' = -\frac{1}{a^2 l}, \;\; m' = -\frac{1}{b^2 m}$$

$$\therefore \text{ CD ಯ ಸಮೀಕರಣ } \frac{x}{a^2 l} + \frac{y}{b^2 m} + 1 = 0$$

7.6 ಚಕ್ರೀಯ ಬಿಂದುಗಳು—

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವೂ

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ವೃತ್ತವೂ A $(a \cos\theta, b \sin\theta)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ.

$$\therefore \; a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta + 2ga \cos\theta + 2fb \sin\theta + c = 0$$

$\tan\frac{\theta}{2} = t$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ ಸರಳೀಕರಿಸಿದರೆ,

$$(a^2 + c - 2ag)\, t^4 + 4\, b f t^3 + 2\,(c + 2b^2 - a^2)\, t^2$$
$$+ 4\, b f t + (c + a^2 + 2ag) = 0$$

ಇದು t ಯಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಘಾತದ ಸಮೀಕರಣ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಇದಕ್ಕೆ ನಾಲ್ಕು ಮೂಲಗಳಿವೆ. ಒಂದು ವೃತ್ತವೂ ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತವೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುವು ಎಂದು ಇವು ತೋರಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಚಕ್ರೀಯ ಬಿಂದುಗಳ ಒಂದು ಗಣವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು t_1, t_2, t_3, t_4 ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ, $t_1 = \tan\dfrac{\theta_1}{2}$. ಇತ್ಯಾದಿ. ಇಲ್ಲಿ θ_1 ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಬಿಂದುವಿನ ಉತ್ಕೇಂದ್ರ ಕೋನವಾಗಿದೆ.

$$\Sigma t_1 = \frac{-4bf}{a^2 + c - 2ag}$$

$$\Sigma t_1 t_2 = \frac{2(c + 2b^2 - a^2)}{a^2 + c - 2ag}$$

$$\Sigma t_1t_2t_3 = \frac{-4bf}{a^2+c-2ag}$$

$$t_1t_2t_3t_4 = \frac{c+a^2+2ag}{a^2+c-2ag}$$

ಈಗ $\tan\left(\frac{\theta_1}{2}+\frac{\theta_2}{2}+\frac{\theta_3}{2}+\frac{\theta_4}{2}\right) = \frac{\Sigma t_1 - \Sigma t_1t_2t_3}{1-\Sigma t_1t_2+t_1t_2t_3t_4}$

$$= \frac{\text{ಶೂನ್ಯ}}{\text{ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆ}} = 0$$

$$\therefore \frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}{2} = n\pi, \quad n \in I$$

$$\therefore \theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4 = 2n\pi \tag{7.8}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಚಕ್ರೀಯ ಬಿಂದುಗಳ ಒಂದು ಗಣದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ π ಯ ಒಂದು ಸಮ ಅಪವರ್ತ್ಯ.

ಉದಾಹರಣೆ

(1) ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ವೃತ್ತ, ದೀರ್ಘವೃತ್ತಗಳ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಾಮಾನ್ಯಜ್ಯಾಗಳು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿ ಬಾಗಿಕೊಂಡಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

A, B, C, D ಚಕ್ರೀಯ ಬಿಂದುಗಳ ಉತ್ಕೇಂದ್ರ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ ಎಂದಿರಲಿ.

$$\therefore \theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4 = 2n\pi, \quad n \in I$$

AB, CD ಎಂಬ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

AB ಯ ಓಟ $= -\frac{b}{a}\cot\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$

CD ಯ ಓಟ $= -\frac{b}{a}\cot\frac{\theta_3+\theta_4}{2} = -\frac{b}{a}\cot\frac{2n\pi-(\theta_1+\theta_2)}{2}$

$$= +\frac{b}{a}\cot\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$\therefore$ AB, CD ಗಳು x–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ (ದೀರ್ಘಾಕ್ಷ), ಅದರಂತೆಯೇ y–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ (ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷ) ಸಹ, ಸಮಾನವಾಗಿ ಬಾಗಿಕೊಂಡಿವೆ.

(2) A, B, C, D ಸಹಲಂಬ ಬಿಂದುಗಳ ಒಂದು ಗಣ. $\triangle$ ABC ಯ ಪರಿವೃತ್ತ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು ಪುನಃ D′ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು. DD′ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

A, B, C, D ಗಳ ಉತ್ಕೇಂದ್ರ ಕೋನಗಳು $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ ಎಂದೂ D′ನದು θ_4' ಎಂದೂ ಇರಲಿ.

ಆಗ, $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = (2n+1)\pi, \quad n \in I$

ಮತ್ತು, $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4' = 2m\pi, \; m \in I$

$\therefore \; \theta_4 - \theta_4' = [2(n-m)+1]\pi$

$= \pi$ ಯ ಒಂದು ವಿಷಮ ಅಪವರ್ತ್ಯ.

$\therefore$ DD′ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.1

1 ನಾಭಿಯು (3, 1) ಮತ್ತು ಚಾಲಕ $x - y + 6 = 0$ ಮತ್ತು ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ $\frac{1}{2}$ ಇರುವ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ

$$7x^2 + 2xy + 7y^2 - 60x - 4y + 44 = 0$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

2 ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ, ನಾಭಿ ಮತ್ತು ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ (2, −1), (1, −2), $\frac{1}{4}$ ಎಂದಿದ್ದರೆ ಆ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ

$$31x^2 - 2xy + 31y^2 - 66x + 126y + 127 = 0$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

3 $4x^2 + 3y^2 = 36$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4 $4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y - 23 = 0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ (1, −1), ಅಕ್ಷಗಳ ಉದ್ದ 6, 4 ಮತ್ತು ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

5 ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ನಾಭೀಲಂಬದ ಒಂದು ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷದ ಒಂದು ಕೊನೆಯ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದಾದರೆ, ಆ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ e ಯು $e^4 + e^2 - 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತಾಳೆ ಮಾಡುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

6 ಒಂದು ವೃತ್ತವ್ಯವಸ್ಥೆಯೂ ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತವೂ ಎರಡು ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ, ಉಳಿದ ಎರಡು ಛೇದನಬಿಂದುಗಳ ಜೋಡಣೆಯು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಒಂದು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

7 $lx + my - 1 = 0$, $l'x + m'y - 1 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು A, B, C, D ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ಚಕ್ರೀಯ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುವು. ABCD ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು

$$(b^2m^2 + a^2l^2)\, l'(x^2 + y^2) - l(a^2 - b^2)(l + l')\, x$$
$$+ m(a^2 - b^2)(l' - l)\, y + l(a^2 - b^2) - l'\, a^2b^2(l^2 + m^2) = 0$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

8 $lx + my + n = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯು $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಲಂಬವಾಗಲು ನಿಯಮ

$$\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{n^2}$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

9 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಲಂಬಜ್ಯಾಗಳ ಧ್ರುವಪಥವು

$\frac{a^6}{x^2} + \frac{b^6}{y^2} = (a^2 - b^2)^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

10 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ 'θ', 'ϕ' ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳ ಛೇದನಬಿಂದು

$$\left[\frac{a^2 - b^2}{a} \cos\theta \cos\phi \cdot \frac{\cos\frac{\theta + \phi}{2}}{\cos\frac{\theta - \phi}{2}}, \quad -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin\theta \sin\phi \cdot \frac{\sin\frac{\theta + \phi}{2}}{\cos\frac{\theta - \phi}{2}}\right]$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

11 ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಛೇದನ ಬಿಂದು P ಎಂದಿರಲಿ. 'ϕ' ಬಿಂದುವು 'θ' ವನ್ನು ಸಮಾಪಿಸಿ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ 'θ' ದೊಡನೆ ಐಕ್ಯವಾದಾಗ P ಯ ಸ್ಥಾನ Q ಆಗಿರಲಿ. Q ಬಿಂದುವು $\left[\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3\theta, -\frac{(a^2-b^2)}{b}\sin^3\theta\right]$ ಎಂದೂ, 'θ' ವು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಚಲಿಸಿದಂತೆ Q ವಿನ ಪಥವು

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$$

ಎಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ. (ಈ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ evolute — ಲಂಬಸ್ಪರ್ಶಿತ—ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ).

12 P ಯು $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು. Q ಉಪವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಅನುರೂಪ ಬಿಂದು. P ಮತ್ತು Q ಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು R ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುವು. R ನ ಪಥ

$x^2 + y^2 = (a+b)^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

13 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ ಯ ಒಂದು ಲಂಬ ಜ್ಯಾ ಇದೆ.

$x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಈ ಲಂಬಜ್ಯಾದ ಧ್ರುವದ ಪಥ $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

14 ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಲಂಬಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿವೆ. ಅವು ದೀರ್ಘಾಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ರಚಿಸುವ ರೇಖಾಂತರಗಳು λ, μ ಆಗಿದ್ದರೆ,

$\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}=\frac{a^2+b^2}{b^4}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

15 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ ಯ ಮೇಲಿರುವ ಸಹಲಂಬ ಬಿಂದುಗಳ ಒಂದು ಗಣ (x_r, y_r), $r = 1, 2, 3, 4$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $\Sigma x_1 . \Sigma x_1^{-1} = 4$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

16 $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ ದಿಂದ PS. PS′ ಗಳನ್ನು (S. S′ ನಾಭಿಗಳು) ಎಳೆದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ Q, R ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವಂತೆ ವೃದ್ಧಿಸಲಾಗಿದೆ. QR ನ ಸಮೀಕರಣವು

$\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\left(\frac{1+e^2}{1-e^2}\right)\sin\theta + 1 = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

17 ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ P ಯು ಚಲಿಸಿದಂತೆ QR ರೇಖೆಯು

$$\left[\frac{x^2 b(1-e^2)}{a} + \frac{y^2 a(1+e^2)^2}{b(1-e^2)}\right]^2 = a^2y^2(1+e^2)^2 + b^2x^2(1-e^2)^2$$

ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

18 ಪ್ರಶ್ನೆ 16 ರಲ್ಲಿ P ಯು ಚಲಿಸಿದಂತೆ, QR ನ ಧ್ರುವಪಥವು $(1+e^2)^2 \dfrac{x^2}{a^2} + (1-e^2)^2 \dfrac{y^2}{b^2} = (1+e^2)^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

19 ಪ್ರಶ್ನೆ 16 ರಲ್ಲಿ Q ಮತ್ತು R ಗಳ ಉತ್ಕೇಂದ್ರ ಕೋನಗಳು ϕ ಮತ್ತು ψ ಎಂದಿದ್ದರೆ P ಯ ಎಲ್ಲ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೂ $\tan\dfrac{\phi}{2}\cot\dfrac{\psi}{2}$ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

20 P ಎಂಬ ಚರಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಥಿರ ದಿಕ್ಕುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ PQ_1R_1 ಮತ್ತು PQ_2R_2 ಎನ್ನುವ ಎರಡು ಛೇದಕಗಳನ್ನು ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳು Q_1, R_1 ಮತ್ತು Q_2, R_2. P ಯ ಎಲ್ಲ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೂ $\dfrac{PQ_1 \cdot PR_1}{PQ_2 \cdot PR_2}$ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

21 P ಮತ್ತು Q ಎಂಬ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿಂದ PAB, QCD ಎಂಬ ಎರಡು ಛೇದಕಗಳನ್ನು ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಈ ಛೇದಕಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದಿರುವ ವ್ಯಾಸಗಳ ಉದ್ದ d_1 ಮತ್ತು d_2.

$\dfrac{PA \cdot PB}{QC \cdot QD} = \dfrac{d_1^2}{d_2^2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

22 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತ ಅನ್ವತಿಸುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಶೃಂಗಗಳ ಉತ್ಕೇಂದ್ರ ಕೋನಗಳು α, β, γ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು

$2ab \sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\beta-\gamma}{2}\sin\dfrac{\gamma-\alpha}{2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

23 ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ತ್ರಿಕೋನದ ಶೃಂಗಗಳ (ಉಪವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ) ಅನುರೂಪ ಬಿಂದುಗಳು ರಚಿಸುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ $\dfrac{b}{a}$ ಯಷ್ಟು ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವಿದೆಯೆಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ.

24 α, β, γ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ರಚಿಸುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು

$$ab \tan\frac{\alpha-\beta}{2}\tan\frac{\beta-\gamma}{2}\tan\frac{\gamma-\alpha}{2}$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

25 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾಗಳು

$x^2+y^2=c^2$ ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುವು. ಈ ಜ್ಯಾಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ಪಥವು $c^2\left[\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right]=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

26 ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ಪಥವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

27 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾಗಳ ಧ್ರುವಗಳು $x^2+y^2-a^2=0$ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿದ್ದರೆ, ಈ ಜ್ಯಾಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ಪಥ

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{a^2}$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

28 $\frac{l_1x}{a}+\frac{m_1y}{b}-1=0,\ \frac{l_2x}{a}+\frac{m_2y}{b}-1=0$

$\frac{l_3x}{a}+\frac{m_3y}{b}-1=0$ ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಸ್ವಾನುವರ್ತಿ ತ್ರಿಭುಜದ ಭುಜಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ನಿಯಮವೇನು ?

29 ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು ಆವೃತಿಸುವ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಶೃಂಗಗಳು ಒಂದೊಂದು ಚಾಲಕದ ಮೇಲಿದ್ದರೆ ಮೂರನೆಯ ಶೃಂಗದ ಪಥವು

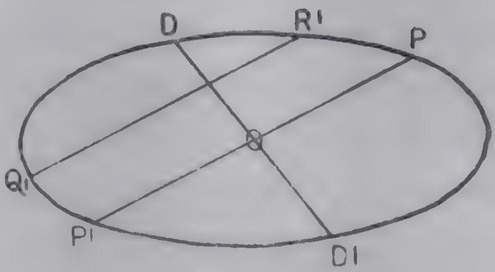
$$\frac{(1+e^2)^2}{a^2}x^2+\frac{(1-e^2)^2}{b^2}y^2=(1+e^2)^2$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

30 P, Q, R ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಉತ್ಕೇಂದ್ರಕೋನ θ ಆಗಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುವು. $\triangle PQR$ ನ ಪರಿವೃತ್ತ

$$x^2+y^2-\frac{b^2x}{a}\cos\theta-\frac{a^2y}{b}\sin\theta=a^2+b^2$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

7.7 ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸಗಳು—

$P'OP$ ಯು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಒಂದು ವ್ಯಾಸವಾಗಿರಲಿ. ಇದರ ಓಟ m ಎಂದಿರಲಿ. Q_1R_1 ಈ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ಒಂದು ಜ್ಯಾ. Q_1R_1 ರ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು (x_1, y_1) ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ Q_1R_1 ರ ಸಮೀಕರಣವು $(S_1 = S_{11})$



ಚಿತ್ರ 7.3

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$$

$$\text{ಇದರ ಓಟ} = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1} = m \text{ (ದತ್ತ)}$$

$$\therefore (x_1, y_1) \text{ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ } y = -\frac{b^2}{a^2m}x.$$

ಇದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಒಂದು ವ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ. ಇದು $D'OD$ ಆಗಿರಲಿ. ಇದರ ಓಟ m' ಎಂದಿದ್ದರೆ,

$$m' = -\frac{b^2}{a^2m}$$

ಈಗ $m = -\frac{b^2}{a^2m'}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $D'OD$ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ಜ್ಯಾಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು $P'OP$ ವ್ಯಾಸದ ಮೇಲಿವೆ ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

ಹೀಗೆ $P'OP$ ಮತ್ತು $D'OD$ ವ್ಯಾಸಗಳು ಒಂದು ಇನ್ನೊಂದಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ಜ್ಯಾಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ಪಥ ಆಗಿ ಇವೆ. ಇವುಗಳ ಓಟಗಳು m, m' ಗಳು $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$ ಎಂಬ ನಿಯಮದಿಂದ ಬಂಧಿತವಾಗಿವೆ.

ಇಂತಹ ವ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸಗಳೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.

$P'OP$ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ P', P ಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಸಹ $D'OD$ ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು $D'OD$ ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಜ್ಯಾಗಳ ಒಂದು ವಿಶೇಷ ಅಥವಾ ಪರಮಾವಧಿ ರೂಪ. ಈ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ

ಛೇದನ ಬಿಂದು P′OP ವ್ಯಾಸದ ಧ್ರುವ. ಆದರೆ ಇದು (ಛೇದನ ಬಿಂದು) D′OD ಯ ಮೇಲೆ ಅನಂತದಲ್ಲಿ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ P′OP ಯ ಧ್ರುವವು D′OD ಯ ಮೇಲಿದೆ. ಅದೇ ರೀತಿ D′OD ಯ ಧ್ರುವವು P′OP ಯ ಮೇಲಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ P′OP ಮತ್ತು D′OD ಗಳು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿ ರೇಖೆಗಳೂ ಹೌದು. ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿ, ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸಗಳು ಅನುವರ್ತಿ ರೇಖೆಗಳ ಒಂದು ವಿಶೇಷ ರೂಪ.

$lx + my + n = 0$, $l'x + m'y + n' = 0$ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿ ರೇಖೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಇದರ ನಿಯಮ

$a^2ll' + b^2mm' - nn' = 0$, (7.3) ನೋಡಿ.

$n = n' = 0$ ಆದಾಗ ಮೇಲಿನ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸಗಳಾಗುವುವು. ಆಗ ನಿಯಮವು

$$a^2ll' + b^2mm' = 0$$

$$\left(-\frac{l}{m}\right)\left(-\frac{l'}{m'}\right) = -\frac{b^2}{a^2}$$

ಓಟಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= -\dfrac{b^2}{a^2}$

7.8 ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸಗಳ ಗುಣಗಳು—P′OP ಮತ್ತು D′OD ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸಗಳಾಗಿರಲಿ. B ಮತ್ತು D ಗಳ ಉತ್ಕೇಂದ್ರ ಕೋನಗಳು θ, ϕ ಎಂದಿರಲಿ.

OP ಯ ಓಟ $= \dfrac{b \sin \theta}{a \cos \theta}$

OD ಯ ಓಟ $= \dfrac{b \sin \phi}{a \cos \phi}$

$$\therefore \frac{b}{a}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\frac{b}{a}\frac{\sin\phi}{\cos\phi} = -\frac{b^2}{a^2}$$

$$\therefore \tan\theta = -\cot\phi$$

$$\therefore \theta \pm \frac{\pi}{2} = \phi$$

ಅಥವಾ $\theta \sim \phi = \frac{\pi}{2}$ ರ ವಿಷಮ ಅಪವರ್ತ್ಯ. (7.9)

I $\therefore\ OP^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$

$$OD^2 = a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi$$
$$= a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta$$

$\therefore\ OP^2 + OD^2 = a^2 + b^2$. ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ.

II S, S' ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ನಾಭಿಗಳಾಗಿರಲಿ.

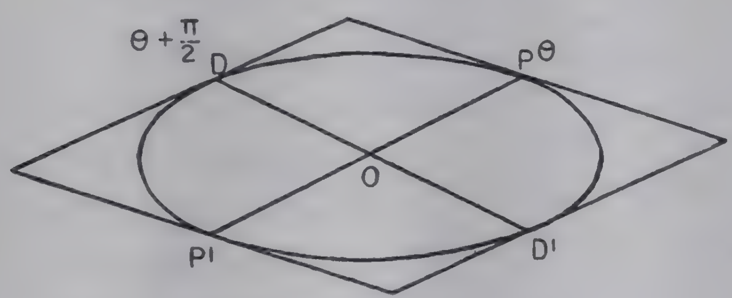
$$SP^2 = (ae - a\cos\theta)^2 + b^2\sin^2\theta$$
$$= a^2(1 - e\cos\theta)^2$$
$$SP = a(1 - e\cos\theta)$$

ಇದೇ ರೀತಿ, $S'P = a(1 + e\cos\theta)$

ಈಗ, $OD^2 = a^2(1 - e^2\cos^2\theta)$

$\therefore\ SP.S'P = OD^2$

III P, D, P', D' ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು. ಇವು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುವು.



ಚಿತ್ರ 7.4

ಇದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= 8 \times \triangle OPD$

$$= 8 \times \tfrac{1}{2}(ab\cos^2\theta + ab\sin^2\theta)$$

$= 4ab$, ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ.

$\therefore$ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸಗಳ ಕೊನೆಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಸ್ಥಿರಕ್ಷೇತ್ರಫಲವಿರುವ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುವು.

IV $OP = OD$ ಆದಾಗ, $OP^2 = OD^2$

$$a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta = a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta$$

$$\therefore \quad (a^2 - b^2)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$$

$$\therefore \quad \theta = \pm \frac{\pi}{4}$$

ಇಲ್ಲಿ P′OP, D′OD ಗಳು ಅನುವರ್ತಿ ಮತ್ತು ಸಮಾನ ವ್ಯಾಸಗಳಾಗಿವೆ. ಇಂಥ ವ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಸಮಾನ ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಂಥ ವ್ಯಾಸಗಳ ಕೊನೆಗಳ ಉತ್ಕೇಂದ್ರ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ

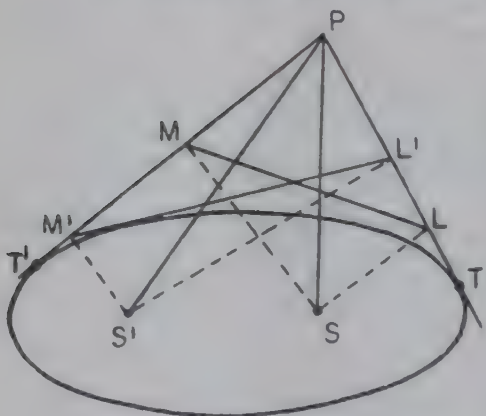
$$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}.$$

$$\text{OP ಯ ಓಟ} = \frac{b \sin \frac{\pi}{4}}{a \cos \frac{\pi}{4}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{OD ಯ ಓಟ} = \frac{b \sin \frac{3\pi}{4}}{a \cos \frac{3\pi}{4}} = -\frac{b}{a}$$

∴ OP, OD ಗಳು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿ ಬಾಗಿ ಕೊಂಡಿವೆ.

7.9 ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಕೆಲವು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಗುಣಗಳು—



ಚಿತ್ರ 7.5

I ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಆ ಬಿಂದುವನ್ನು ನಾಭಿಗಳಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿ ಬಾಗಿಕೊಂಡಿವೆ.

PT, PT′ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಮೇಲೆ SL, S′L′, SM, S′M′ ಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

ಆಗ, SL.S′L′ = SM.S′M′ = b^2. (ಪು. 114, ಉದಾ. 4).

$$\therefore \quad \frac{SL}{S'M'} = \frac{SM}{S'L'} \qquad (1)$$

MSLP ಮತ್ತು M′S′L′P ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಿಂದ,

$$\angle MSL = \pi - \angle MPL = \pi - \angle M'PL'$$

$$= \angle M'S'L' \qquad (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ $\triangle$s SLM ಮತ್ತು S′L′M′ ಅನುರೂಪವಾಗಿವೆ.

$\therefore \angle SML = \angle S'L'M'$

ಆದರೆ, $\angle SML = \angle SPT$

ಮತ್ತು $\angle S'L'M' = \angle S'PT'$

$\therefore \angle SPT = \angle S'PT'$

II P ಮತ್ತು P′ ಕ್ರಮವಾಗಿ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮತ್ತು ಉಪವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. P′PN ನ್ನು ದೀರ್ಘಾಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. P ಯ ಉತ್ಕೇಂದ್ರಕೋನ θ ಎಂದಿದ್ದರೆ, P ಯು $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$, P′ $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ ಆಗುವುವು.

$$\therefore \frac{PN}{P'N} = \frac{b\sin\theta}{a\sin\theta} = \frac{b}{a}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ದೀರ್ಘಾಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಉಪವೃತ್ತದಿಂದ ಸೀಮಿತವಾಗಿರುವ ಪ್ರತಿ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನೂ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವು ಒಂದು ಸ್ಥಿರನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು.

III ಒಂದು ವೃತ್ತವು ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು. ಈ ಬಿಂದುಗಳು A, B, C, D ಎಂದಿರಲಿ. AB, CD ಜ್ಯಾಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು $L = 0$, $L' = 0$ ಎಂದಿರಲಿ. ದೀರ್ಘವೃತ್ತವು $S = 0$ ಆದರೆ, ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$S + \lambda LL' = 0$$

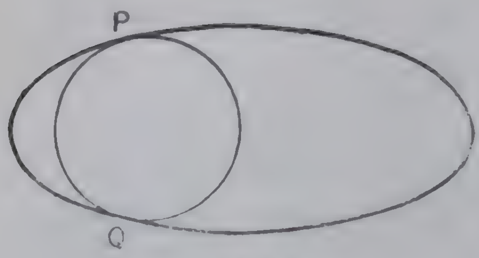
ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ λ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣದ ಗುಣಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಬೇಕು (ಅಭ್ಯಾಸ 7.1 ರಲ್ಲಿ 7 ನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆ).

A, B ಬಿಂದುಗಳು ಸಂಗಮಿಸಿದಾಗ, AB ಜ್ಯಾವು A ಯಲ್ಲಿ ದೀರ್ಘವೃತ್ತ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗುವುದು. ಅದೇ ರೀತಿ CD ಬಿಂದುಗಳು ಸಂಗಮಿಸಿದಾಗ, CD ಜ್ಯಾವು C ಯಲ್ಲಿ ಅವುಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗುವುದು.

ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು

$S + \lambda S_1 S_2 = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವುದು.

$S_1 = 0$, $S_2 = 0$ A ಮತ್ತು C ಗಳಲ್ಲಿ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು.



ಚಿತ್ರ 7.6

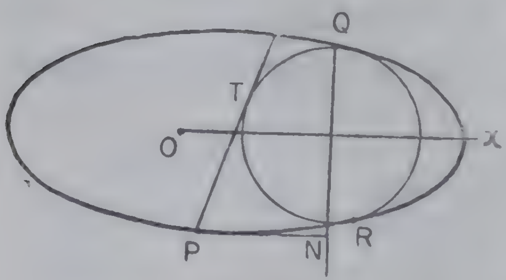
ನಾಲ್ಕು ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದಂತೆ ಒಂದೊಂದು ಜೊತೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಐಕ್ಯವಾದಾಗ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ದೀರ್ಘ ವೃತ್ತದೊಡನೆ ಉಭಯ ಸ್ಪರ್ಶ ವಿದೆಯೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. PQ ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭ ದಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾ ಆಗಿರಲಿ. ಇದರ ಸಮೀಕರಣವು $L=0$ ಎಂದಿದ್ದರೆ, ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $S+\lambda L^2=0$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

PQ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾವು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಒಂದು ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬ (ಅಥವಾ ಸಮಾನಾಂತರ) ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಒಳಗಿನ ಉಭಯ ಸ್ಪರ್ಶವಾದಾಗ ಸಾಮಾನ್ಯಜ್ಯಾವು ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆ. ಹೊರಗಿನ ಉಭಯ ಸ್ಪರ್ಶವಾದಾಗ ವೃತ್ತವು ಉಪವೃತ್ತವಾಗುವುದು ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯಜ್ಯಾ ದೀರ್ಘಾಕ್ಷವಾಗುವುದು.

ಉಭಯಸ್ಪರ್ಶವಿರುವ ವೃತ್ತ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದೊಡನೆ ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವಾದಾಗ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದಂತೆ ಅದು ಉಪವೃತ್ತವಾಗಬಹುದು; ಅಥವಾ ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಸವಾಗಿ ರಚಿಸಿದ ವೃತ್ತವೂ (ಹ್ರಸ್ವ ಉಪವೃತ್ತ) ಆಗಬಹುದು. ಈ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಅಕ್ಷದ ಅರ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ

1 ಒಂದು ವೃತ್ತವು ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದೊಡನೆ ಉಭಯಸ್ಪರ್ಶ ಹೊಂದಿದೆ. ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು P ಯಿಂದ PN ನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿಯೂ PT ಯನ್ನು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿಯೂ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. $PT=ePN$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7·7

ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾ QR ದೀರ್ಘಾಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. ಅದರ ಸಮೀಕರಣ $x=h$ ಎಂದಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1+\lambda(x-h)^2=0$$

$$\lambda+\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}$$

$$\therefore \text{ ವೃತ್ತವು } x^2+y^2-\frac{2h}{a^2}(a^2-b^2)\,x+\frac{h^2(a^2-b^2)-a^2b^2}{a^2}=0$$

$P\,(a\cos\theta, b\sin\theta)$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು.

$$PT^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta-\frac{2h\cos\theta\,(a^2-b^2)}{a}+\frac{h^2(a^2-b^2)-a^2b^2}{a^2}$$

$$=e^2(a\cos\theta-h)^2$$

$$PN^2=(a\cos\theta-h)^2$$

$$\therefore\ PT=e\,PN$$

2 OP, OQ, OR ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೂರು ವ್ಯಾಸಗಳು. P, Q, R ಗಳ ಉತ್ಕೇಂದ್ರ ಕೋನಗಳು α, β, γ. OP′, OQ′, OR′ ಗಳು ಈ ವ್ಯಾಸಗಳ ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸಗಳು. ಇಲ್ಲಿ P′, Q′, R′ ಗಳ ಉತ್ಕೇಂದ್ರ ಕೋನಗಳು $\alpha+\frac{\pi}{2}, \beta+\frac{\pi}{2}, \gamma+\frac{\pi}{2}$ ಆಗಿವೆ. $\triangle$ PQR ನ ಪರಿವೃತ್ತವು $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ಆಗಿದ್ದರೆ $\triangle$ P′Q′R′ ನ ಪರಿವೃತ್ತ

$$x^2+y^2-2\frac{fb}{a}x-2\frac{ga}{b}y-(a^2+b^2+c)=0$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

α, β, γ ಗಳು $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ

$$a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta+2ga\cos\theta+2fb\sin\theta+c=0$$

$$(\theta=\alpha, \beta, \gamma)$$

$\triangle$ P′Q′R′ ನ ಪರಿವೃತ್ತವು

$x^2+y^2+2Gx+2Fy+C=0$ ಎಂದಿದ್ದರೆ,

$\alpha+\frac{\pi}{2}, \beta+\frac{\pi}{2}, \gamma+\frac{\pi}{2}$ ಇದರ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ

$$a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta - 2\,Ga \sin\theta + 2\,Fb \cos\theta + C = 0$$

ಕೂಡಿಸಿದರೆ, $(\theta = \alpha, \beta, \gamma)$

$$(a^2 + b^2 + c + C) + 2\cos\theta\,(ga + Fb) + 2\sin\theta\,(fb - Ga) = 0$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವು $\theta = \alpha, \beta, \gamma$ ಮೂರು ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಇದಕ್ಕಿರುವುದು ಎರಡೇ ಮೂಲಗಳು.

$\therefore$ ಇದೊಂದು ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

$$\therefore\ ga + Fb = fb - Ga = a^2 + b^2 + c + C = 0$$

$$\therefore\ F = -\frac{ga}{b},\ G = \frac{fb}{a},\ C = -(a^2 + b^2 + c)$$

$\therefore$ $\triangle P'Q'R'$ ನ ಪರಿವೃತ್ತವು

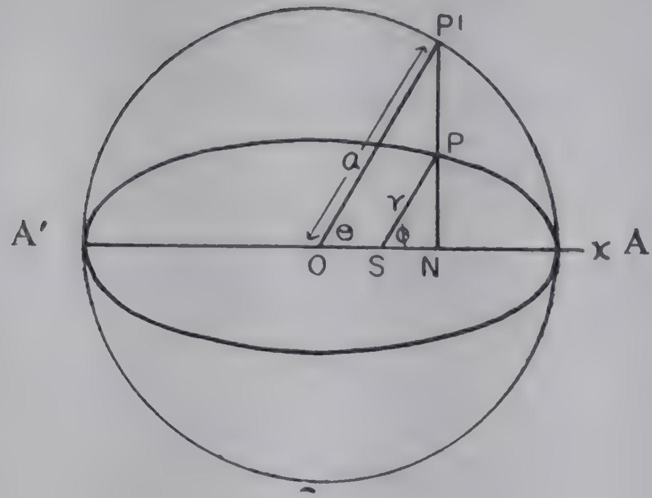
$$x^2 + y^2 + 2\frac{fb}{a}x - 2\frac{ga}{b}y - (a^2 + b^2 + c) = 0$$

(ಸೂಚನೆ: ದತ್ತವ್ಯಾಸ OP, OQ, OR ಗಳಿಗೆ ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $P_1'OP_1$, $Q_1'OQ_1$, $R_1'OR_1$ ಆಗಿರಲಿ. P, Q, R ಗಳ ಉತ್ಕೇಂದ್ರ ಕೋನಗಳು α, β, γ ಆಗಿದ್ದರೆ, P_1', P_1 ಗಳ ಉತ್ಕೇಂದ್ರ ಕೋನಗಳು $\alpha - \frac{\pi}{2}$, $\alpha + \frac{\pi}{2}$ ಇತ್ಯಾದಿ ಆಗಿರುವುವು. $\triangle PQR$ ನ ಪರಿವೃತ್ತ ದತ್ತವಾಗಿರುವಾಗ $\triangle P_1Q_1R_1$ ರ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ಮೇಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ $P_1, Q_1, R_1, P_1', Q_1', R_1'$ ಎನ್ನುವ ಆರು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳ ಪರಿವೃತ್ತ ಏನು, ಇಂತಹ ವಿವಿಧ ಪರಿವೃತ್ತಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧ ವೇನು ಮುಂತಾದುವುಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಅನ್ವೇಷಿಸಬೇಕು.)

3 P ಯು $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು. θ ಅದರ ಉತ್ಕೇಂದ್ರಕೋನ. ನಾಭಿಯಿಂದ ಅಳತೆಮಾಡಿದ ಸದಿಶಾಕೋನವು (ಅಂದರೆ $\angle xSP$) ϕ.

$$\tan\frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{\theta}{2}$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

$SP = r$ ಎಂದಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 7.8

P ಯು $(a\cos\theta, b\sin\theta)$

$$\therefore \quad r^2 = (ae - a\cos\theta)^2 + b^2\sin^2\theta$$

$$\therefore \quad r = a(1 - e\cos\theta)$$

$$\therefore \quad \cos\phi = \frac{SN}{r} = \frac{\cos\theta - e}{1 - e\cos\theta}$$

$$\therefore \quad \frac{1-\cos\phi}{1+\cos\phi} = \frac{(1+e)(1-\cos\theta)}{(1-e)(1+\cos\theta)}$$

$$\therefore \quad \tan\frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\cdot\tan\frac{\theta}{2}$$

4 $y = mx + c$ ಸರಳರೇಖೆಯು $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸುವ ಜ್ಯಾದ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಿದ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈ ಸರಳರೇಖೆಯು ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ಆಗಿದ್ದರೆ PQ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಸವಾಗಿ ರಚಿಸಿದ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

$$x^2 + y^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y + x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} y &= mx + c \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ x, y ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಿದರೆ,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+c)^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) + \frac{2mc}{b^2}x + \frac{c^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$\therefore\ x_1 + x_2 = \frac{\dfrac{-2mc^2}{b^2}}{\dfrac{b^2 + a^2m^2}{a^2b^2}} = \frac{-2mca^2}{b^2 + a^2m^2}$$

$$x_1x_2 = \frac{(c^2 - b^2)\,a^2}{a^2m^2 + b^2}$$

ಪುನಃ $\dfrac{(y-c)^2}{m^2a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

$$y^2\left[\frac{1}{m^2a^2} + \frac{1}{b^2}\right] - \frac{2cy}{m^2a^2} + \frac{c^2}{m^2a^2} - 1 = 0$$

$$\therefore\ y_1 + y_2 = \frac{2cb^2}{b^2 + m^2a^2}$$

$$y_1y_2 = \frac{(c^2 - m^2a^2)\,b^2}{b^2 + m^2a^2}$$

$\therefore$ ಬೇಕಾದ ವೃತ್ತವು $x^2 + y^2 + \dfrac{2mca^2}{b^2 + a^2m^2}\,x$

$$-\frac{2cb^2}{b^2 + a^2m^2}\,y + \frac{(c^2 - b^2)\,a^2 + b^2(c^2 - m^2a^2)}{b^2 + a^2m^2} = 0$$

ಅಭ್ಯಾಸ 7.2

1 ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸಗಳ ಕೊನೆಗಳಲ್ಲಿ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 2 = 0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಛೇದಿಸುವುವು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

2 ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸಗಳ ಕೊನೆಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥವು

$$2(a^2x^2+b^2y^2)^3=(a^2-b^2)^2(a^2x^2-b^2y^2)^2$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

3 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸಗಳ ಕೊನೆಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಜ್ಯಾದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಪಥ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

4 $\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1$ ಶಂಕುಜದ ಜ್ಯಾಗಳು, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಜ್ಯಾಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ಪಥವು

$$\left(\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}\right)^2=\frac{a^2x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{b^2y^2}{(b^2+\lambda)^2}$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

5 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜ್ಯಾದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು (x_1, y_1). ಆ ಜ್ಯಾದ ಕೊನೆಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು (x_2, y_2) ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು (x_3, y_3).

$$\frac{a^2x_2}{x_3}+\frac{b^2y_2}{y_3}=(a^2-b^2)\left(\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}\right)$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

6 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಒಂದು ಲಂಬವು $\frac{x^2}{a_1{}^2}+\frac{y^2}{b_1{}^2}=1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದು. ಇಂತಹ ಎಂಟು ಲಂಬಗಳಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ. ಅವು ವಾಸ್ತವವಾಗಿದ್ದರೆ, $a^2-b^2>aa'+bb'$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

7 P ಯು $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು. ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (h, k). PT, PT′ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು. ಈ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ಅರ್ಧವ್ಯಾಸಗಳ ಉದ್ದ d, d' ಎಂದಿದ್ದರೆ,

$$\frac{PT^2}{d^2}=\frac{PT'^2}{d'^2}=\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}-1$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

8 P, Q, R ಮತ್ತು P′, Q′, R′ ಬಿಂದುಗಳು $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣಗಳು. P, P′; Q, Q′: R, R′ ಬಿಂದು ಯುಗ್ಮಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಯುಗ್ಮದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $\frac{\pi}{2}$. $\triangle$PQR ನ ಪರಿವೃತ್ತ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ಆಗಿದ್ದರೆ $\triangle$ P′Q′R′ ನ ಪರಿವೃತ್ತ $x^2+y^2-\frac{2fb}{a}x-\frac{2ga}{b}y-(a^2+b^2+c)=0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

9 ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ P, P′; Q, Q′; R, R′ ಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು $ax+by=0$ ವ್ಯಾಸದ ಮೇಲೆ ಸಂಧಿಸುವುವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

10 ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವಂತಹ ಜ್ಯಾಗಳ ಧ್ರುವಗಳ ಪಥವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11 ದೀರ್ಘಾಕ್ಷದ ಕೊನೆಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಮೇಲೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ರೇಖಾಂತರದ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಸವಾಗಿ ರಚಿಸಿದ ವೃತ್ತವು ನಾಭಿಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

12 $\triangle$s ABC ಮತ್ತು PQR ಗಳನ್ನು ದೀರ್ಘವೃತ್ತವು ಆವೃತಿಸುವುದು. AB, PQ ಗಳು ಮತ್ತು AC, PR ಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆ. BC ಯು ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಸಾಗಿದರೆ QR ಸಹ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

13 AB ಯು ಒಂದು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ. P ಯು ಇದರ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು. PQ ವನ್ನು AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. Q ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿದೆ. M ಬಿಂದುವನ್ನು PQ ವಿನ ಮೇಲೆ QM $=\lambda$ QP ಆಗಿರುವಂತೆ ಆರಿಸಲಾಗಿದೆ. M ನ ಪಥವು AB ಯು ಅಕ್ಷವಾಗಿರುವಂತಹ ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

14 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ ಯ ಎರಡು ಲಂಬ ವ್ಯಾಸಗಳು PQ ಮತ್ತು P′Q′ ಆಗಿವೆ.

$$\frac{4}{PQ^2}+\frac{4}{P'Q'^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

15 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸಗಳು $lx+my=1$ ಸ್ಥಿರ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು P, Q ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ

ಸಂಧಿಸುವುವು. P ಮತ್ತು Q ನಲ್ಲಿ ಆಯಾ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು R ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುವು. R ನ ಪಥ $a^2lx + b^2my = a^2 + b^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

16 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ OP ಎನ್ನುವ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ A(h, k) ಎನ್ನುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಲಂಬ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. OP ಯ ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸ OD ಯನ್ನು ಈ ಲಂಬವು Q ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು. OP ಯು ಬದಲಾದಂತೆ Q ನ ಪಥವು $(a^2 - b^2)xy - a^2hy + b^2kx = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. Q ನ ಪಥ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದೆಂದೂ, ಈ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುವೆಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ.

17 S, S′ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ನಾಭಿಗಳು. P ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು. SP ಮತ್ತು S′P ಗಳ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಸವಾಗಿ ರಚಿಸಿದ ವೃತ್ತಗಳು ಉಪವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

18 POP′, DOD′ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸಗಳು. P ಯ ಉತ್ಕೇಂದ್ರ ಕೋನವು θ. D ಯ ಉತ್ಕೇಂದ್ರ ಕೋನ $\theta + \frac{\pi}{2}$. PP′D ವೃತ್ತವು ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು ಪುನಃ ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಉತ್ಕೇಂದ್ರ ಕೋನವು $\frac{\pi}{2} - 3\theta$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

19 SP, S′P′ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಮಾನಾಂತರ ನಾಭೀಜ್ಯಾಗಳು. ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು ಇವು P, P′ ಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುವು. P ಮತ್ತು P′ ಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು S′P′ ಮತ್ತು SP ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ Q ಮತ್ತು Q′ ಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುವು. QQ′ ರೇಖೆಯು PP′ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

20 S ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಒಂದು ನಾಭಿ. P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ನಾಲ್ಕು ಲಂಬಗಳ ಪಾದಗಳು A, B, C, D ಆದರೆ,

$$SA \,.\, SB \,.\, SC \,.\, SD = \frac{a^2b^2 . SP^2}{a^2 - b^2}$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

21 P, Q, R ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು. OP′, OQ′, OR′ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ವ್ಯಾಸಗಳ ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸಗಳು △PQR ನ ಪರಿವೃತ್ತವು ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು S ನಲ್ಲಿಯೂ, ∠P′Q′R′ ನ ಪರಿವೃತ್ತ S′ ನಲ್ಲಿಯೂ ಸಂಧಿಸಿದರೆ, OS, OS′ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸಗಳೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

22 P ಬಿಂದು $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ಮೇಲಿದೆ. P ಯಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ದೀರ್ಘಾಕ್ಷವನ್ನು G ಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು. S ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಒಂದು ನಾಭಿ. S ನಿಂದ P ಯಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳ ಹರಾತ್ಮಕ ಮಧ್ಯಕವು PG ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

23 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಒಂದು ನಾಭಿಯು S. SP ಯನ್ನು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. SP ಯನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿ ಅದರ ಮೇಲೆ Q ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು SP = SQ ಎಂಬ ನಿಯಮದಂತೆ ಆರಿಸಲಾಗಿದೆ. Q ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ನಿಯಾಮಕ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ವರ್ಗವು SP ವರ್ಗದ ಎರಡರಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸಮಾನವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

24 ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವನ್ನು ದೀರ್ಘ ವೃತ್ತದ ಯಾವುದೇ ವ್ಯಾಸದ ಕೊನೆ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

25 P ಯಲ್ಲಿ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಅನುವರ್ತಿಯಾಗಿ OQ ಎನ್ನುವ ವ್ಯಾಸವಿದ್ದರೆ, OP ವ್ಯಾಸವು Q ನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬದ ಅನುವರ್ತಿ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

26 $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ ಉತ್ಕೇಂದ್ರಕೋನಗಳಾಗಿರುವ P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು

$$x = \frac{(a^2 - b^2)\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{a\cos\beta}$$

$$y = \frac{(b^2 - a^2)\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{b\cos\beta}$$

ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(*a*) PQ ಒಂದು ನಾಭಿಮೂಲಕ ಸಾಗಿದಾಗ,

(*b*) P ಮತ್ತು Q ಗಳು ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿವ್ಯಾಸಗಳ ಕೊನೆ ಬಿಂದುಗಳಾದಾಗ,

ಈ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

27 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬದಲಾಗುತ್ತಿರುವ ಜ್ಯಾವು ಸ್ಥಿರಬಿಂದು C $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$ ಯಲ್ಲಿ ಸದಾ $\frac{\pi}{2}$ ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.

ಈ ಜ್ಯಾವು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದೆಂದೂ ಆ ಬಿಂದು

$$A\left[\frac{a(a^2-b^2)\cos\alpha}{a^2+b^2},\ \frac{b(b^2-a^2)\sin\alpha}{a^2+b^2}\right]$$

ಎಂದೂ ಸಾಧಿಸಿ C ಯು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಚಲಿಸಿದಂತೆ A ಯ ಪಥವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

28 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ $\triangle PQR$ ನ್ನು ಆವೃತಿಸುವುದು. ಶೃಂಗಗಳ ಉತ್ಕೇಂದ್ರಕೋನಗಳು $\alpha,\ \alpha+\frac{2\pi}{3},\ \alpha+\frac{4\pi}{3}$ ಆಗಿವೆ. ಶೃಂಗಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಎದುರು ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ. ಆದ್ದರಿಂದ P, Q, R ನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗಿವೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. $\triangle PQR$ ನ ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾದಂತೆ ಈ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ

$$4a^2x^2+4b^2y^2=(a^2-b^2)^2$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

29 O ಒಂದು ಸ್ಥಿರಬಿಂದು. ಒಂದು ಚಲಿಸುವ ಛೇದಕವು ಸದಾ O ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದು. ಅದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು H, Q ಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು. R ಎನ್ನುವ ಬಿಂದುವನ್ನು HQ ಮೇಲೆ ಆರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಅದರ ಸ್ಥಾನ (*a*) $\frac{1}{OH}+\frac{1}{OQ}=\frac{1}{OR}$.

(*b*) $\frac{1}{OH}-\frac{1}{OQ}=\frac{1}{OR}$

(*c*) $OH\ .\ OQ=OR^2$

ಎಂದಿದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಲವೂ R ನ ಪಥ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

30 S ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ನಾಭಿ. P ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು. P ಯಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಮೇಲೆ T ಬಿಂದುವನ್ನು ಆರಿಸಲಾಗಿದೆ. TX, TY ಗಳನ್ನು SP ಮತ್ತು S ನ ಸಹಗಾಮಿ ಚಾಲಕಕ್ಕೂ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಲಂಬಗಳಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. $SX=e\,TY$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಎಂಟನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯ

ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ

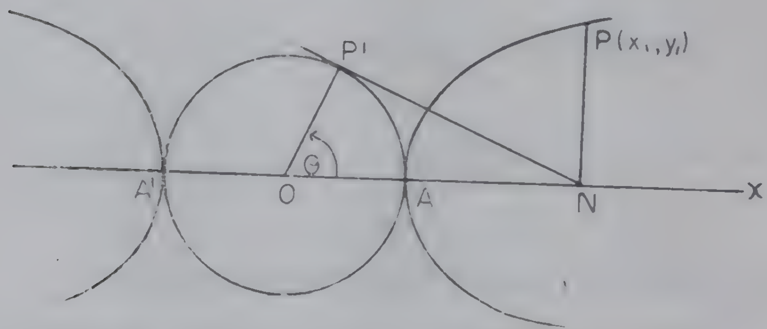
8·1 ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ ಮತ್ತು ದೀರ್ಘವೃತ್ತ—

ಇವುಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ b^2 ನ್ನು $-b^2$ ಆಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದರೆ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದ 7.1, 7.2 ಮತ್ತು 7.3 ಪರಿಚ್ಛೇದಗಳನ್ನೂ ಅಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನೂ ಯುಕ್ತ ಬದಲಾವಣೆಯಿಂದ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದು. ಇದೇ ರೀತಿ 7.5 ಮತ್ತು 7.6 ಪರಿಚ್ಛೇದಗಳಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿದ ಸಹಲಂಬ ಮತ್ತು ಚಕ್ರೀಯ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣಗಳನ್ನೂ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

8·2 ಉಪವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಪ್ರಾಚಲ ಸಮೀಕರಣಗಳು—



ಚಿತ್ರ 8.1

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಅನುಪ್ರಸ್ಥ ಅಕ್ಷ A′A ನ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಸವಾಗಿ ರಚಿಸಿದ ವೃತ್ತದ ಹೆಸರು ಉಪವೃತ್ತ. ಇದರ ಸಮೀಕರಣ

$$x^2+y^2-a^2=0$$

$P(x_1, y_1)$ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು. PN ನ್ನು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿಯೂ, NP′ ನ್ನು ಉಪವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿಯೂ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

$\angle xOP' = \theta$ ಎಂದಿರಲಿ. P ಯು ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಮೇಲೆ ಚಲಿಸಿದಂತೆ P′ ಉಪವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಚಲಿಸುವುದು. ಮತ್ತು ಆಗ θ ಕೋನವು 0 ಯಿಂದ 2π ವರೆಗೆ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳನ್ನೂ ಪಡೆಯುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ θ ವನ್ನು P ಯ ಪ್ರಾಚಲವೆಂದು ಕರೆಯಬಹುದು.

$$x_1 = ON = a\sec\theta$$

$$y_1 = b\sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} - 1} = b\tan\theta$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} x &= a\sec\theta \\ y &= b\tan\theta \end{aligned}\right\}$$ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಪ್ರಾಚಲ ಸಮೀಕರಣಗಳು.

8·3 ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು—

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಧ್ರುವೀಯ ಸಮೀಕರಣವು

$\frac{r^2\cos^2\theta}{a^2} - \frac{r^2\sin^2\theta}{b^2} - 1 = 0$ ಆಗಿದೆ (O ಧ್ರುವ).

$$\therefore \quad \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\theta}{a^2} - \frac{\sin^2\theta}{b^2}$$

$\theta = 0$ ಆದಾಗ, $r = a$

θ ದ ಬೆಲೆ ಏರಿದಂತೆ, $\frac{1}{r^2}$ ಬೆಲೆ ಏರುವುದು.

$\frac{\cos^2\theta}{a^2} - \frac{\sin^2\theta}{b^2} = 0$ ಆದಾಗ $\frac{1}{r^2} = 0$

$\therefore \tan^2\theta = \frac{b^2}{a^2}$ ಆದಾಗ r^2 ಬೆಲೆ ಅಪರ್ಯಾಪ್ತ.

ಮತ್ತು $|\tan\theta| > \frac{b}{a}$ ಆದಾಗ, r ಬೆಲೆ ಊಹಾಜನ್ಯ.

$\therefore y = \frac{bx}{a}$, $y = -\frac{bx}{a}$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ (ಇವು ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ವ್ಯಾಸಗಳೂ ಹೌದು) ನಡುವೆ ಎಳೆದ ಯಾವ ವ್ಯಾಸವೂ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವನ್ನು ಸಂಧಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

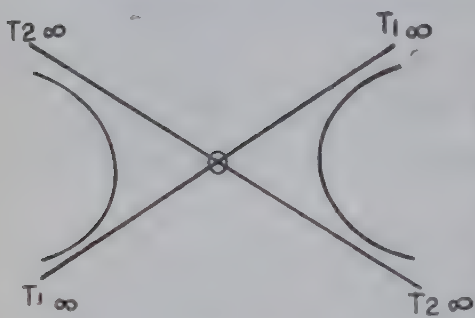
ಈಗ, $y = \pm\frac{bx}{a}$ ವ್ಯಾಸಗಳು ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವನ್ನು ಅನಂತ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುವು. ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣವೂ ($SS_{11} = S_1^2$) ಇದೇ ಆಗಿದೆ.

$\therefore\ y = \pm\frac{b}{a}x$ ಗಳು ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು. ಇವುಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$. ಇವು ಊಹಾಜನ್ಯವಾಗಿವೆ.



ಚಿತ್ರ 8.2

ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ($T_1'_\infty\ T_{1\infty}$ ಮತ್ತು $T_2'_\infty\ T_{2\infty}$) ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಎಲ್ಲ ವ್ಯಾಸಗಳನ್ನೂ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ಮತ್ತು ಛೇದಿಸದಿರುವ ಎರಡು ಗಣಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುವುವು.

8·4 ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ—

$H \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣವು

$A \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ ಆಗಿದೆ. ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $H - A =$ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವೆಂದು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಸಮೀಕರಣ ದತ್ತವಾದಾಗ ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಮತ್ತು ವಿಲೋಮವಾಗಿ ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮೀಕರಣ ದತ್ತವಾದಾಗ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾಡ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮೀಕರಣ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು ಎಂದು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

$$S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

ಒಂದು ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿರಲಿ. ಇದರಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾದ c ಯನ್ನು $c + \lambda$ ಎಂದು ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳಿಸಿ

$$A \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c + \lambda = 0$$

ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. $A = 0$ ಈ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾಗಿರಲಿ. ಇದು ಒಂದು ಜೊತೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c+\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & h & 0 \\ h & b & 0 \\ g & f & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \lambda = \frac{-\Delta}{ab - h^2}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

$$\therefore A \equiv S - \frac{\Delta}{ab - h^2} = 0$$

$$A \equiv (lx + my - 1)(l'x + m'y - 1) = 0$$

ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾಗಿರುವ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವು $S \equiv (lx + my - 1)(l'x + m'y - 1) + \lambda = 0$. λ ವು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ. $S = 0$ ಯ ಕೇಂದ್ರವು $lx + my - 1 = 0$, $l'x + m'y - 1 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು. λ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿ ಇಂತಹ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಮಿತವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

ಉದಾಹರಣೆ

(1) $2x^2 + 5xy + 2y^2 - 11x - 7y - 4 = 0$

ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$S \equiv 2x^2 + 5xy + 2y^2 - 11x - 7y - 4 = 0$$

$$A \equiv 2x^2 + 5xy + 2y^2 - 11x - 7y - 4 + k = 0$$

ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾಗಿರಲಿ.

$$\therefore \; k = \frac{-\Delta}{4 - \frac{25}{4}}, \; \Delta = \begin{vmatrix} 2 & \frac{5}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{11}{2} & -\frac{7}{2} & -4 \end{vmatrix} = \frac{81}{4}$$

$$\therefore \; k = -\frac{81}{4} \times \frac{4}{-9} = 9$$

$$\therefore \; A \equiv 2x^2 + 5xy + 2y^2 - 11x - 7y + 5 = 0$$

(2) $3x + 2y + 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾಗಿರುವ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವು $(1, -1)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದು. ಅದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$A \equiv (3x + 2y + 1)(x + y - 1) = 0$$

$\therefore \; S \equiv (3x + 2y + 1)(x + y - 1) + k = 0$ ಬೇಕಾದ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ. ಇದು $(1, -1)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದರಿಂದ

$$2 . (-1) + k = 0, \quad k = 2$$

$$\therefore \; S \equiv (3x + 2y + 1)(x + y - 1) + 2 = 0$$

8.5 ಅನುವರ್ತಿ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ— $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಅನುಪ್ರಸ್ಥ ಅಕ್ಷವೆಂದೂ y-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಅನುವರ್ತಿ ಅಕ್ಷವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಿದರೆ—ಅಂದರೆ ಈ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಅನುಪ್ರಸ್ಥ ಮತ್ತು ಅನುವರ್ತಿ ಅಕ್ಷಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಅನುವರ್ತಿ ಮತ್ತು ಅನುಪ್ರಸ್ಥ ಅಕ್ಷಗಳಾಗುವಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ—ಅದರ ಸಮೀಕರಣವು

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0 \quad \text{ಅಥವಾ} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

ಈ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವನ್ನು ದತ್ತ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಅನುವರ್ತಿ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$S \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$ ದತ್ತ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ.

$$S' \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$ ಅನುವರ್ತಿ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ.

ಇವೆರಡರ ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು

$$A \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ಗುಣಗಳು—

I $S + S' = 2A$ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಈಗ

$$S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

ಒಂದು ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವಾಗಿರಲಿ. ಅದರ ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು

$$A \equiv S - \frac{\triangle}{ab - h^2} = 0$$

ಅನುವರ್ತಿ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ, $S' \equiv 2A - S = 0$

$$\therefore \ S' \equiv S - \frac{2\triangle}{ab - h^2} = 0$$

II $S \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ x-ಅಕ್ಷವನ್ನು $(\pm a, 0)$ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಯೂ, y-ಅಕ್ಷವನ್ನು $(0, \pm bi)$ ಊಹ್ಯಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಛೇದಿಸುವುದು.

$S' \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ x-ಅಕ್ಷವನ್ನು $(\pm ai, 0)$ ಊಹ್ಯಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಯೂ, y-ಅಕ್ಷವನ್ನು $(0, \pm b)$ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಛೇದಿಸುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅನುವರ್ತಿ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವು (ದತ್ತ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ) ಅನುವರ್ತಿ ಅಕ್ಷವನ್ನು ವಾಸ್ತವಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು.

III ಈ ಬಿಂದುಗಳು $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $B(0, b)$, $B'(0, -b)$ ಎಂದೂ ಕಲ್ಪನೆಯ ಸೌಕರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ $A_i'(-ai, 0)$, $A_i(ai, 0)$, $B_i'(0, -bi)$, $B_i(0, bi)$ ಎಂದೂ ಇರಲಿ.

ಆಗ, $OA^2 + OA_i^2 = OB^2 + OB_i^2 = 0$ (ಇತ್ಯಾದಿ).

8.6 ಅನುವರ್ತಿವ್ಯಾಸಗಳು—ಪರಿಚ್ಛೇದ 7.7 ರಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿರುವ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿದರೆ,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \text{ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾಕ್ಕೆ}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = m_1 x \\ y = m_2 x \end{array}\right\}$$ ಎಂಬ ಎರಡು ವ್ಯಾಸಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅನುವರ್ತಿಗಳಾಗಿರಲು ನಿಯಮ $m_1 m_2 = \frac{b^2}{a^2}$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

I ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿವ್ಯಾಸಗಳು ಒಂದು ಇನ್ನೊಂದಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ಜ್ಯಾಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ಪಥ.

II $y = m_1 x$ ವ್ಯಾಸವು $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವನ್ನು $P(a\sec\theta, b\tan\theta)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ.

$$\therefore m_1 = \frac{b}{a}\sin\theta. \text{ ಇದರ ಅನುವರ್ತಿವ್ಯಾಸದ ಓಟ,}$$

$$m_2 = \frac{b}{a\sin\theta}$$

ಈ ಅನುವರ್ತಿವ್ಯಾಸವು ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವನ್ನು

$$Q_i(ai\tan\theta, bi\sec\theta),\ Q_i'(-ai\tan\theta, -bi\sec\theta)$$

ಎನ್ನುವ ಎರಡು ಊಹ್ಯಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು. ಇದೇ ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸವು ಅನುವರ್ತಿ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ ಯನ್ನು $Q(a\tan\theta, b\sec\theta)$, $Q'(-a\tan\theta, -b\sec\theta)$ ಎನ್ನುವ ಎರಡು ವಾಸ್ತವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು.

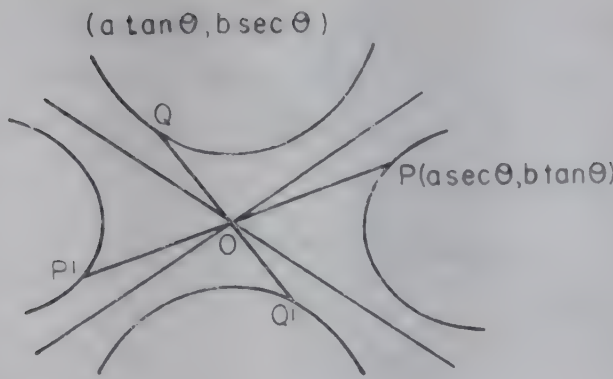
$$OP^2 = a^2\sec^2\theta + b^2\tan^2\theta$$

$$OQ^2 = a^2\tan^2\theta + b^2\sec^2\theta$$

$$\therefore OP^2 - OQ^2 = a^2 - b^2$$

$$OP^2 + OQ_i^2 = a^2 - b^2$$

$$\therefore OQ^2 + OQ_i^2 = 0$$



ಚಿತ್ರ 8.3

III P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಆಯಾ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು. ಇವುಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$\frac{x}{a\cos\theta} - \frac{y\tan\theta}{b} - 1 = 0$$

$$\frac{x\tan\theta}{a} - \frac{y}{b\cos\theta} + 1 = 0$$

ಅಥವಾ $$L_1 \equiv \frac{x}{a} - \frac{y\sin\theta}{b} - \cos\theta = 0$$

$$L_2 \equiv \frac{x\sin\theta}{a} - \frac{y}{b} + \cos\theta = 0$$

ಈಗ $$\sin\theta\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\sin\theta - \cos\theta\right) + \sin\theta\left(\frac{x\sin\theta}{a} - \frac{y}{b} + \cos\theta\right)$$

$$= \frac{x}{a}(\sin\theta + \sin^2\theta) - \frac{y}{b}(\sin\theta + \sin^2\theta)$$

$$= (\sin\theta + \sin^2\theta)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$$

$$\therefore \quad L_1\sin\theta + L_2\sin\theta + (\sin\theta + \sin^2\theta)\left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\right) = 0$$

(θ ದ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಇದು ಸತ್ಯ)

$\therefore$ $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ ಗಳು $y = \frac{bx}{a}$ ಅಥವಾ ಒಂದು ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಮೇಲೆ ಸಂಧಿಸುವವು. ಹೀಗೆ P, Q, P′, Q′ ಗಳಲ್ಲಿ ಆಯಾ

ಹೈಪರ್ಬೋಲಾಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಮೇಲೆ ಸಂಧಿಸುವುವು. ಅಲ್ಲದೆ, ಈ ನಾಲ್ಕು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುವು. (P, P′; Q, Q′ ನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆಯಷ್ಟೆ).

ಈ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

$= 8 \triangle OPQ$

$= 8 . \frac{1}{2} . (ab \sec^2\theta - ab \tan^2\theta)$

$= 4ab$, ಇದೊಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ.

IV ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಸಾಧಿಸಬೇಕು :

(i) ನಾಭಿಗಳಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಪಾದಗಳು ಉಪವೃತ್ತದ ($x^2 + y^2 = a^2$) ಮೇಲಿವೆ.

(ii) ನಾಭಿಗಳಿಂದ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $-b^2$ ಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.

(iii) ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಮೇಲಿರುವ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ನಾಭಿಗಳು ರಚಿಸುವ ಕೋನಗಳನ್ನು P ಯಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವುವು.

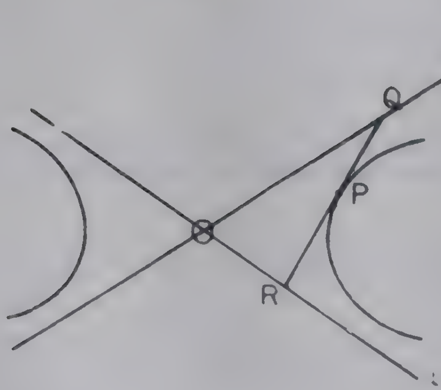
(iv) P ಯು ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಮೇಲೆ ಇಲ್ಲದಿರುವ ಬಿಂದು. P ಯಿಂದ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು P ಯನ್ನು ನಾಭಿಗಳಿಗೆ ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿ ಬಾಗಿಕೊಂಡಿವೆ.

(v) ಒಂದು ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದು P ಯಿಂದ ಎಳೆದ ಛೇದಕವು ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವನ್ನು Q, R ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು. OD ಯು ಈ ಛೇದಕಕ್ಕೆ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ತ್ರಿಜ್ಯ. ಆಗ $PQ . PR = OD^2$. ಛೇದಕವು ಇನ್ನೊಂದು ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು P′ ಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಿದರೆ PP′ ಮತ್ತು QR ಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ

(1) ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ರೇಖಾಂತರಿಸುವ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ವಿಭಾಗವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು ಸಮದ್ವಿಭಾಗಿಸುವುದೆಂದೂ, ಈ ಮೂರು ರೇಖೆಗಳು ರಚಿಸುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಸ್ಥಿರವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಅಕ್ಷಗಳಾಗಿ ಆರಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಅವುಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ $xy = 0$



ಚಿತ್ರ 8.4

$\therefore$ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಸಮೀಕರಣ $xy = c^2$, c^2 ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ. $P(x_1, y_1)$ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು ಆಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ Ox, Oy ಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ P ಯ ದೂರಗಳು x_1, y_1. RPQ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವು $xy_1 + x_1y = 2c^2$

$$\therefore \text{ R ಬಿಂದು } \left(\frac{2c^2}{y_1}, 0\right); \text{ Q ಬಿಂದು } \left(0, \frac{2c^2}{x_1}\right)$$

$$\text{QR ನ ಮಧ್ಯಬಿಂದು } \left(\frac{c^2}{y_1}, \frac{c^2}{x_1}\right); \text{ ಆದರೆ } x_1y_1 = c^2$$

$\therefore$ ಈ ಮಧ್ಯಬಿಂದು (x_1, y_1)— ಇದು P ಬಿಂದು.

$$\triangle ORQ = \tfrac{1}{2} OR \,.\, OQ \sin \omega$$

$$= \tfrac{1}{2} \,.\, \frac{2c^2}{y_1} \frac{2c^2}{x_1} \sin \omega$$

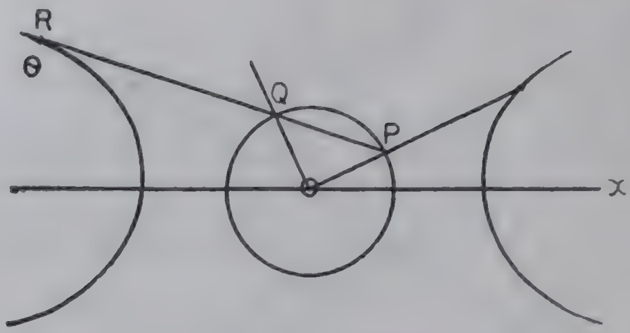
$$= 2c^2 \sin \omega, \text{ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ, } (\omega = \angle xoy)$$

(2) ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವು ನಿಯಾಮಕವೃತ್ತವನ್ನು P, Q ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು. OP, OQ (O ಕೇಂದ್ರ) ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿವ್ಯಾಸಗಳೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

$R(a \sec \theta, b \tan \theta)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವು

$$\frac{x}{a \cos \theta} - \frac{y \sin \theta}{b \cos \theta} = 1. \text{ ನಿಯಾಮಕ ವೃತ್ತವು}$$

$$x^2 + y^2 = a^2 - b^2$$



ಚಿತ್ರ 8.5

OP, OQ ಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯಲು ನಿಯಾಮಕವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಮಾನಘಾತಿಸಬೇಕು. ಆ ಸಮೀಕರಣವು

$$b^2x^2(b^2 - a^2\sin^2\theta) + 2xy\,ab\,(a^2 - b^2)\sin\theta$$

$$+ a^2y^2(b^2 - a^2\sin^2\theta) = 0$$

OP, OQ ಗಳ ಓಟಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= \dfrac{b^2(b^2 - a^2\sin^2\theta)}{a^2(b^2 - a^2\sin^2\theta)} = \dfrac{b^2}{a^2}$

ಅಭ್ಯಾಸ 8.1

1 ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಮೇಲಿರುವ θ, ϕ, ψ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗಲು ನಿಯಮು

$$\begin{vmatrix} \sin\theta & \tan\theta & 1 \\ \sin\phi & \tan\phi & 1 \\ \sin\psi & \tan\psi & 1 \end{vmatrix} = 0$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

2 $2x + 3y - 1 = 0,\ 3x - 4y + 5 = 0$ ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾಗಿರುವ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ (3, 5) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗಿದರೆ ಅದರ ಸಮೀಕರಣವು $6x^2 + xy - 12y^2 + 7x + 19y + 115 = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

3. $21x + 5y = 116$ ಸರಳರೇಖೆಯು

$7x^2 - 5y^2 = 232$ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ. ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4 $4y = 5x + 9$ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ $16y^2 - 9x^2 = 144$ಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5 (α, β) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಓಟಗಳು $\tan\phi_1$, $\tan\phi_2$ ಆಗಿದ್ದರೆ,

$$\tan\phi_1 + \tan\phi_2 = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - a^2}$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

6 ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು 2α ಆಗಿದ್ದರೆ ಆ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯು $\sec 2\alpha$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

7 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಮೇಲಿರುವ (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವು ಉಪವೃತ್ತವನ್ನು (α_1, β_1), (α_2, β_2) ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಿದರೆ.

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} = \frac{2}{y_1}$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

8 OP, OQ, OR ಗಳು $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಮೂರು ವ್ಯಾಸಗಳು. ಇವುಗಳ ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸಗಳು ಅನುವರ್ತಿ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ P′, Q′, R′ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುವು. $\triangle$PQR ನ ಪರಿವೃತ್ತವು $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ $\triangle$ P′Q′R′ ನ ಪರಿವೃತ್ತವು

$$x^2 + y^2 + \frac{2fb}{a}x + \frac{2ga}{b}y + b^2 - a^2 - c = 0$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

9 $x = \frac{a(1 + t^2)}{1 - t^2}$, $y = \frac{2bt}{1 - t^2}$ ಒಂದು ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಪ್ರಾಚಲ ಸಮೀಕರಣಗಳು. t ಯು ಪ್ರಾಚಲ. t_1, t_2, t_3, t_4 ಈ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಚಕ್ರೀಯ ಬಿಂದುಗಳ ಒಂದು ಗಣವಾದರೆ,

$$\Sigma t_1 + \Sigma t_1 t_2 t_3 = 0$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

10 ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಚಕ್ರೀಯ ಬಿಂದುಗಳು P_1, P_2, P_3, P_4 ಎಂದಿರಲಿ. P_1M_1, P_2M_2 ಒಂದು ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕದ ಮೇಲೂ, P_3N_3, P_4N_4 ಇನ್ನೊಂದು ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕದ ಮೇಲೂ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

$$P_1M_1 \,.\, P_2M_2 = P_3N_3 \,.\, P_4N_4$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

11 $x^2+y^2-a^2=0$ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ $x^2-y^2-a^2=0$ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಸ್ಪರ್ಶಕ ಜ್ಯಾಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ಪಥ $(x^2-y^2)^2=a^2(x^2+y^2)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

12 $x^2+y^2-a^2=0$ ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾಗಳು $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ಪಥ

$(x^2+y^2)^2=a^2x^2-b^2y^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

13 $x^2-y^2=a^2-b^2$ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಅವು ಅಕ್ಷದೊಡನೆ ಪೂರಕಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ (ಮೊತ್ತ $\frac{\pi}{2}$).

14 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಲಂಬಜ್ಯಾಗಳ ಧ್ರುವ ಪಥವು

$y^2a^6-x^2b^6=x^2y^2(a^2+b^2)^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

15 ಎರಡು ಪರಸ್ಪರ ಅನುವರ್ತಿ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾಗಳಿವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಧ್ರುವೀಯಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆಯೆಂದೂ ಅವು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿವೆಯೆಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ.

16 ನಾಭಿಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಸವಾಗಿ ರಚಿಸಿರುವ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವನ್ನು ಕುರಿತು ಈ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಧ್ರುವಗಳ ಪಥವು

$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=\frac{1}{a^2+b^2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

17 ಒಂದು ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ ಮತ್ತು ಅದರ ಅನುವರ್ತಿ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾಗಳ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಗಳು e ಮತ್ತು e' ಎಂದಿದ್ದರೆ,

$\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e'^2}=1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

18 ವೃತ್ತಗಳ ಒಂದು ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಿದೆ. ಈ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಒಂದು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ಧ್ರುವಗಳ ಪಥವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ

ಒಂದು ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ. ಇದರ ಒಂದು ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕವು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ಇನ್ನೊಂದು ಮೂಲಾಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಂತರವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ.

19 $y^2-4ax=0$ ಪೆರಾಬೊಲಾವನ್ನು ಕುರಿತ P ಬಿಂದುವಿನ ಧ್ರುವೀಯವು $x^2+y^2=a^2$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ, P ಯ ಪಥವು $4x^2-y^2=4a^2$ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

20 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ಬಿಂದುಗಳ ಧ್ರುವೀಯಗಳು (ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ ಯನ್ನು ಕುರಿತು) ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ,

$\frac{x_1x_2}{a^4}+\frac{y_1y_2}{b^2}=0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

8.7 ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ—

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0.$ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳು

$\pm\tan^{-1}\left(\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)$. ಈ ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾದಾಗ $a^2-b^2=0$

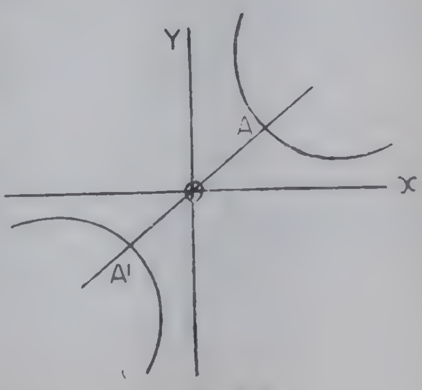
ಅಥವಾ $a=b$

ಆಗ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವು $x^2-y^2=a^2$ ಆಗುವುದು. ಈ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವನ್ನು ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಅಕ್ಷಗಳೂ, ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳೂ ಪರಸ್ಪರ ಕೋನಗಳ ಸಮದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಅಕ್ಷಗಳಾಗಿ ಆರಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಸಮೀಕರಣವು $xy=\lambda$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವುದು. A ಬಿಂದು ಈ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಮೇಲಿದೆ.

A ಯು $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$

$\therefore \frac{a^2}{2}=\lambda$



ಚಿತ್ರ 8.6

∴ ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಸಮೀಕರಣವು

$xy = \frac{a^2}{2}$ ಅಥವಾ $xy = c^2$. c ಯು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ.

8.8 ಪ್ರಾಚಲ ಸಮೀಕರಣಗಳು—

$x = ct,\ y = \frac{c}{t}$ ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಪ್ರಾಚಲಸಮೀಕರಣಗಳು. t ಯು ಪ್ರಾಚಲ.

(1) t_1, t_2 ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಜ್ಯಾ ಸಮೀಕರಣ

$$x + t_1t_2y - c(t_1 + t_2) = 0$$

(2) t ಯಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವು

$$x + t^2y - 2ct = 0$$

(3) ಲಂಬ ಜ್ಯಾಗಳ ಧ್ರುವಗಳ ಪಥ:

t ಯಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬವು

$$y - \frac{c}{t} = t^2(x - ct)$$

$$t^3x - ty - ct^4 + c = 0 \qquad (1)$$

ಇದರ ಧ್ರುವ $P(x_1, y_1)$ ಆಗಿರಲಿ.

P ಯ ಧ್ರುವೀಯ $xy_1 + yx_1 - 2c^2 = 0$ (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ಸರ್ವಸಮವಾಗಿವೆ.

$$\therefore \frac{x_1}{-t} = \frac{y_1}{t^3} = \frac{-2c^2}{-c(t^4 - 1)}$$

t ಯನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಬೇಕು.

$t^2 = -\frac{y_1}{x_1}$ ∴ P ಯ ಪಥ ಸಮೀಕರಣವು

$$x^2 = \frac{4c^2}{\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right)^2}\left(-\frac{y}{x}\right) = -\frac{4c^2yx^3}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$\therefore (x^2 - y^2)^2 + 4c^2xy = 0$$

ಉದಾಹರಣೆ

(1) ಸಹಲಂಬ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣವು ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು ಅದರ ಲಂಬ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ರಚಿಸುವುವು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ದತ್ತಬಿಂದು (h, k) ಯಿಂದ ಎಳೆದ ಒಂದು ಲಂಬಪಾದ 't' ಆಗಿದ್ದರೆ, t ಯು $ct^4 - ht^3 + kt - c = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತಾಳೆ ಮಾಡುವುದು. ಹೀಗೆ ದೊರೆಯುವ ನಾಲ್ಕು ಲಂಬ ಪಾದಗಳ ಪ್ರಾಚಲಗಳು t_1, t_2, t_3, t_4 ಆಗಿದ್ದರೆ

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = -1$$

ಈ ಬಿಂದುಗಳು A, B, C, D ಆಗಿರಲಿ. $\triangle ABC$ ಯ ಲಂಬಕೇಂದ್ರವು $H\left(-\frac{c}{t_1 t_2 t_3}, \ -ct_1 t_2 t_3\right)$ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ ನಿಯಮದಿಂದ ಈ ಬಿಂದು $H\left(ct_4, \frac{c}{t_4}\right)$ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ ಇದು D ಬಿಂದುವೂ ಆಗಿದೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ವಿಷಯವನ್ನು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ—ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವು ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಆವೃತಿಸಿದರೆ ಅದು ತ್ರಿಭುಜದ ಲಂಬಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದು.

(2) ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವನ್ನು ಒಂದು ವೃತ್ತವು (ತ್ರಿಜ್ಯ R) A, B, C, D ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು. O ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಕೇಂದ್ರವಾದರೆ,

$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 4R^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + k = 0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೂ

$xy = c^2$ ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾಕ್ಕೂ ಇರುವ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದು $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ t ಯು

$$c^2 t^4 + 2gct^3 + kt^2 + 2fct + c^2 = 0$$

ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲವಾಗಿದೆ. t ಯ ನಾಲ್ಕು ಬೆಲೆಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಾದ A, B, C, D ಗಳ ಪ್ರಾಚಲಗಳು.

$$\Sigma t_1 = -\frac{2g}{c}, \ \Sigma t_1 t_2 = \frac{k}{c^2}$$

$$\Sigma \frac{1}{t_1} = -\frac{2f}{c}, \ \Sigma \frac{1}{t_1 t_2} = \frac{k}{c^2}$$

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = \Sigma \left[(ct_1)^2 + \frac{c^2}{t_1^2} \right]$$

$$= c^2 \left[\frac{4g^2}{c^2} - \frac{2k}{c^2} + \frac{4f^2}{c^2} - \frac{2k}{c^2} \right]$$

$$= 4(g^2 + f^2 - k) = 4R^2$$

ಸೂಚನೆ: (i) ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ $t_1 t_2 t_3 t_4 = 1$

(ii) AB ಯು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವಾದರೆ CD ಯು ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ವ್ಯಾಸವಾಗುವುದು.

(iii) $\triangle$ ABC ಯನ್ನು ಆವೃತಿಸುವ ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಕೇಂದ್ರವು $\triangle$ ABC ಯ ನವಬಿಂದುವೃತ್ತದ ಮೇಲಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 8.2

I $xy = c^2$ ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ—

(1) $(2h, 2k)$ ಎನ್ನುವ ದತ್ತಸ್ಥಿರಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಎಲ್ಲ ಜ್ಯಾಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ಪಥ

$$(x - h)(y - k) = hk$$

(2) ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ದೂರವು ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಧ್ರುವೀಯದ ಕೇಂದ್ರದೂರದ ವಿಲೋಮ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿದೆ.

(3) $y^2 = 4ax$ ಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾಕ್ಕೆ ಇವುಗಳ ಧ್ರುವಗಳ ಪಥ

$$ax^2 + 2c^2y = 0$$

(4) $x^2 = 4ay$ ಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವು ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವನ್ನು P, Q ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು. PQ ವಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಪಥ

$$ay^2 + (xy + c^2)x = 0$$

(5) ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ ಆವೃತಿಸುವ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಭುಜದ ಪರಿಕೇಂದ್ರ ಆ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಮೇಲಿರುವುದು.

(6) ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಮೇಲೆ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಜೋಡಣೆಯು ಉಳಿದೆರಡು ಜೋಡಣೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಗುಣವು ಈ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳ ಪೈಕಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗಲೂ ಸತ್ಯ ವಾಗಿರುವುದು.

(7) ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಜ್ಯಾಗಳ ಉದ್ದ $2l$ ಎಂಬ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ಪಥ

$$(x^2 + y^2)(xy - c^2) = l^2xy$$

(8) $\triangle$ ABC ಯನ್ನು ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವು ಆವೃತಿಸುವುದು. ಈ ತ್ರಿಭುಜದ ಭುಜಗಳು ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳೊಂದಿಗೆ α, β, γ ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುವು. A, B, C ಗಳಲ್ಲಿ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥ ವಾದರೆ,

$$\cot 2\alpha + \cot 2\beta + \cot 2\gamma = 0$$

(9) ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಒಂದು ಲಂಬವು ಅನುಪ್ರಸ್ಥ ಅಕ್ಷ ದೊಡನೆ θ ಕೋನವನ್ನು ($< \frac{\pi}{2}$) ರಚಿಸುವುದು. ಆ ಲಂಬವು ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಪುನಃ ಸಂಧಿಸುವಲ್ಲಿನ ಲಘುಕೋನವು $\cot^{-1}(2 \tan 2\theta)$.

(10) P ಯಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಪುನಃ Q ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು. ಆಗ

$$PQ^2 = 3\,CP^2 + CQ^2$$

(11) PQ ಎಂಬ ಜ್ಯಾ ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಮೇಲಿರುವ A ಎಂಬ ಸ್ಥಿರಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು. A ಯಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬಕ್ಕೆ PQ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವುದು.

(12) P, Q, R ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ S ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುವು. ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಕೇಂದ್ರವು $\triangle$ PQR ನ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವಾಗಿದೆ.

(13) P, Q, R, S ಬಿಂದುಗಳು ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಮೇಲಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು A ಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುವು. O ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಕೇಂದ್ರ. ಆಗ

$$OA^2 = OP^2 + OQ^2 + OR^2 + OS^2$$

(14) (f, g) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ ಪಾದಗಳು ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ ಮತ್ತು $x^2 - y^2 - fx + gy = 0$ (ಇದೂ ಸಹ ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ) ಇವುಗಳ ಛೇದನಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ.

II $xy = c^2$ ಮೇಲೆ ಇರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಪ್ರಾಚಲಗಳು t ಮತ್ತು $2t$. 't' ಯಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು 't', '$2t$' ಗಳಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸುವ ಜ್ಯಾ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು $\pm \tan^{-1}\left(\frac{t^2}{2t^4+1}\right)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

III $x^2 + 4ay = 0$ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಮೇಲಿರುವ P ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ $xy = 2a^2$ ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವನ್ನು ಕುರಿತಾದ ಧ್ರುವೀಯವು $y^2 = 4ax$ ಪೆರಾಬೊಲಾವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

IV $xy = c^2$ ಮೇಲಿರುವ ಚಕ್ರೀಯ ಬಿಂದುಗಳ ಒಂದು ಗಣದ ಪ್ರಾಚಲಗಳು t_1, t_2, t_3, t_4. ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವು (ಅಂದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಯೂ ಸಮಾನದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯ ಒಂದೊಂದು ಕಣವನ್ನಿಟ್ಟರೆ ಅವುಗಳ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ) ವೃತ್ತದ ಮತ್ತು ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

V ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿವ್ಯಾಸಗಳು ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿ ಬಾಗಿಕೊಂಡಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

VI $x^2 - y^2 = a^2$ ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಲಂಬಜ್ಯಾಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು $(y^2 - x^2)^2 = 4a^2x^2y^2$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

VII ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಮೇಲಿರುವ A, B, C ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು ಆ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾದರೆ, $\triangle$ ABC ಯ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವು ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಕೇಂದ್ರವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

VIII $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವೂ, $xy = c^2$ ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವೂ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುವೆಂದೂ, ಆ ಬಿಂದುಗಳ ಉತ್ಕೇಂದ್ರ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು π ಯ ವಿಷಮ ಅಪವರ್ತ್ಯವೆಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ.

IX $(c \tan \theta, c \cot \theta)$ ಬಿಂದು $xy = c^2$ ಮೇಲಿದೆ. $\theta + \theta' =$ ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವಂತೆ θ, θ' ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಜ್ಯಾಗಳು ಅನುವರ್ತಿ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

X $xy = c^2$ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಆವೃತಿಸುವುದು. ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು $y = ax$ ಮತ್ತು $y = bx$ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆ. ಮೂರನೆಯ ಭುಜವು $4abxy = c^2(a + b)^2$ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

XI ಒಂದು ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾಗಳ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾವು ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ವ್ಯಾಸವಾಗಿದ್ದರೆ, ಇನ್ನೊಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾವು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

XII ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವು ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವನ್ನು ಆವೃತಿಸುವುದು. ಈ ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಜೋಡಿಸುವ ವ್ಯಾಸಗಳಿಗೆ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಎದುರು ಭುಜಗಳನ್ನು ಸಂಧಿಸುವಂತೆ ವೃದ್ಧಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ದೊರೆಯುವ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಮೇಲೆ ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

XIII ಒಂದು ದತ್ತಸರಳರೇಖೆ ಇದೆ; ಒಂದು ದತ್ತ ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ (ವೃತ್ತಗಳ) ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಇದೆ. ಈ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಸರಳರೇಖೆಯ ಧ್ರುವಗಳ ಪಥವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಂದು ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವೆಂದೂ ಅದರ ಒಂದು ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕವು ಮೂಲಾಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ಇನ್ನೊಂದು ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕವು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ.

XIV $xy = c^2$ ಮೇಲೆ A, B, C ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳ x–ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು x_1, x_2, x_3 ಆಗಿವೆ.

$$\triangle ABC = \frac{c^2(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)}{2x_1x_2x_3}.$$

ಎಂದೂ, A, B, C ಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಆವೃತಿಸುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು

$$\frac{2c^2(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)}{(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)}$$

ಎಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ.

XV $xy = c^2$ ದ ಸಮಾನಾಂತರ ಜ್ಯಾಗಳ ಮೇಲೆ ಬಿಡಿಸಿದ ವೃತ್ತಗಳು ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

XVI ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವು ಎರಡು ಸ್ಥಿರಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದು; ಮತ್ತು ಅದರ ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ದತ್ತದಿಕ್ಕುಗಳಲ್ಲಿ

ಇವೆ (ಅಂದರೆ ಅವುಗಳ ಓಟಗಳು ಸ್ಥಿರವಾಗಿವೆ). ಇಂತಹ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾಗಳ ಶೃಂಗಗಳು ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಒಂದು ಹೈಪರ್ಬೋಲಾದ ಮೇಲಿವೆ ಯೆಂದೂ, ಈ ಎರಡು ಪಥಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬೀಯವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವುವೆಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ.

XVII $xy = c^2$ ಮತ್ತು $y^2 = 4ax$ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಆಯಾ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು x-ಅಕ್ಷದೊಡನೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ θ, ϕ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುವುವು.

$\tan\theta = -2\tan\phi$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ

ಒಂದನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯ

ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು

1.1 ಪೀಠಿಕೆ—ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಎದುರಾಗುವುವು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $a\cos\theta + b\sin\theta + c = 0$ ಇಂಥ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣ. ಇದನ್ನು $\sin\theta$ ಅಥವಾ $\cos\theta$ ದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ವಾಗಿರುವಂತೆ ಪರಿವರ್ತಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. ಇದರಿಂದ ದೊರೆಯುವ $\sin\theta$ ಅಥವಾ $\cos\theta$ ದ ಬೆಲೆಗಳು ಒಂದೇ, ಎರಡೇ ಅಥವಾ ಅಸಂಖ್ಯಾತವೇ? ಇಂಥ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಸೂಚಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಇದು ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆ.

$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ಎನ್ನುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಇದನ್ನು $\theta = \frac{\pi}{4}$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯು ತಾಳೆ ಮಾಡುವುದು ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ $\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}$ . . . . . ಈ ಬೆಲೆಗಳೂ ಅಷ್ಟೇ ಸತ್ಯವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನ ದತ್ತವಾದಾಗ ಅದರ ಕೋನದ ವಿಶಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ನಾವು ಈಗ ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತೇವೆ.

1.2 ದತ್ತ ಉತ್ಪನ್ನ $\sin\theta$— $\sin\theta = k$ ಎಂದಿರಲಿ. ಮೊದಲ ನೋಟ ದಿಂದ ಅಥವಾ ಕೋಷ್ಟಕ ಪರಿಶೀಲನೆಯಿಂದ θ ದ ಒಂದು ಬೆಲೆಯನ್ನು ತಿಳಿಯ ಬಹುದು. ಅದು α ಎಂದಿರಲಿ.

$$\therefore \sin\alpha = k$$

$$\therefore \sin\theta = \sin\alpha$$

$$\therefore \sin\theta - \sin\alpha = 0$$

$$\therefore 2\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$$

$$\therefore \cos\frac{\theta+\alpha}{2}=0 \text{ ಅಥವಾ } \sin\frac{\theta-\alpha}{2}=0$$

$$\frac{\theta+\alpha}{2}=(2l+1)\frac{\pi}{2} \text{ ಅಥವಾ } \frac{\theta-\alpha}{2}=m\pi, \quad l, m\in I$$

$$\therefore \theta=(2l+1)\pi-\alpha, \text{ ಅಥವಾ } \theta=2m\pi+\alpha$$

ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪ, $\theta = n\pi + (-1)^n \alpha,\ n\in I$ (1.1)

(I ಎಂಬುದು 0 ಮತ್ತು ವಿಶಿಷ್ಟ ಋಣ ಮತ್ತು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ)

ಉದಾಹರಣೆ

(1) $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

ಈಗ $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \theta = -\frac{\pi}{4}$ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತಾಳೆ ಮಾಡುವ ಒಂದು ಬೆಲೆ.

$$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n\left(-\frac{\pi}{4}\right) = n\pi + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}$$

ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ.

(2) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. ಇಲ್ಲಿ $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}$ ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪ $(n\in I)$

1.3 ದತ್ತ ಉತ್ಪನ್ನ $\cos\theta$— $\cos\theta = k$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\theta = \alpha$ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತಾಳೆ ಮಾಡುವ ಒಂದು ಬೆಲೆಯಾಗಿರಲಿ.

$$\therefore \cos\theta = \cos\alpha$$

$$\cos\theta - \cos\alpha = 0$$

$$-2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$$

$$\sin\frac{\theta+\alpha}{2} = 0 \text{ ಅಥವಾ } \sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$$

$$\frac{\theta+\alpha}{2} = l\pi \text{ ಅಥವಾ } \frac{\theta-\alpha}{2} = m\pi, \quad l, m \in I$$

$\theta = 2l\pi - \alpha$ ಅಥವಾ $\theta = 2m\pi + \alpha$

$\therefore \theta = 2n\pi \pm \alpha$ ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪ $(n \in I)$ (1.2)

ಉದಾಹರಣೆ

(1) $\cos\theta = \frac{1}{2}$

ಈಗ $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪ $(n \in I)$

(2) $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

ಈಗ, $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{3\pi}{4}$ ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪ $(n \in I)$

1.4 ದತ್ತ ಉತ್ಪನ್ನ $\tan\theta$— $\tan\theta = k$ ಎಂದಿರಲಿ. ಹಿಂದಿನಂತೆ $\theta = \alpha$ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತಾಳೆ ಮಾಡುವ ಒಂದು ಬೆಲೆಯಾಗಿರಲಿ.

$\therefore \tan\theta = \tan\alpha$

$\therefore \sin(\theta - \alpha) = 0$

$\therefore \theta - \alpha = n\pi$

$\theta = n\pi + \alpha$, $n \in I$, ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪ.

ಉದಾಹರಣೆ

(1) $\tan\theta = -\sqrt{3}$

ಈಗ, $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

$\therefore \theta = n\pi - \frac{\pi}{3}$, $n \in I$, ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪ.

(2) $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

ಈಗ, $\tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ \theta = n\pi + \dfrac{\pi}{6},\ \ n\epsilon \mathrm{I}$, ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪ.

1.5 ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಕ್ರಮ— ಕೆಲವು ಆರಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ.

(1) $a\cos\theta + b\sin\theta + c = 0$, $a, b. c$ ಗಳು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

$a^2\cos^2\theta = (b\sin\theta + c)^2$

$\therefore\ \sin^2\theta\,(b^2 + a^2) + 2bc\sin\theta + (c^2 - a^2) = 0$

ಇದು $\sin\theta$ ದಲ್ಲಿ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ.

$\therefore\ \sin\theta = \sin\alpha, \sin\beta$ ಇದರ ಎರಡು ಮೂಲಗಳಾಗಿರಲಿ.

$\therefore\ \theta = m\pi + (-1)^m\alpha,\ \ \theta = n\pi + (-1)^n\beta$, θ ದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬೆಲೆಗಳು. $n, m\ \epsilon\, \mathrm{I}$.

(2) $\cos^2\theta - \sin\theta - \frac{1}{4} = 0$

$(1 - \sin^2\theta) - \sin\theta - \frac{1}{4} = 0$

$(2\sin\theta - 1)(2\sin\theta + 3) = 0$

$\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6}$; $\sin\theta = -\dfrac{3}{2}$, ಇದು ಅಪ್ರಾಯೋಗಿಕ, ಆದ್ದರಿಂದ ತ್ಯಾಜ್ಯ.

$\therefore\ \theta = n\pi + (-1)^n\dfrac{\pi}{6},\ n\epsilon \mathrm{I}$

(3) $3\cos\theta + 4\sin\theta + 5 = 0$

ಇದು (1) ರಲ್ಲಿ ಬರೆದಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಇನ್ನೊಂದು ಕ್ರಮವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ.

$+\sqrt{3^2 + 4^2}$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು.

$\therefore \frac{3}{5}\cos\theta + \frac{4}{5}\sin\theta = -1$

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನೀಡುವ α ಎನ್ನುವ ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ ಪರಿಶೀಲನೆಯಿಂದ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

$\therefore \sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta = -1$

$\sin(\theta + \alpha) = -1 = \sin(-\frac{\pi}{2})$

$\therefore \theta + \alpha = n\pi + (-1)^n\left(-\frac{\pi}{2}\right), \; n \in I$

$\therefore \theta = n\pi + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{2} - \alpha$ ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ.

(4) $\sin 3\theta = \sin 4\theta$

(a) $\sin 3\theta - \sin 4\theta = 0$

$$-2\cos\frac{7\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = 0$$

$$\therefore \frac{7\theta}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\theta}{2} = l\pi$$

$$\therefore \theta = \frac{(2m+1)}{7}\pi, \quad \theta = 2l\pi, \quad l, m \in I$$

ಅಥವಾ (b) $\sin 3\theta = \sin 4\theta$

$$\therefore 3\theta = n\pi + (-1)^n 4\theta,$$

$$\therefore \theta = \frac{n\pi}{3 + 4(-1)^{n+1}}, \; n \in I$$

(5) $2(1+\sqrt{3})\cos 2\theta + \tan\theta + 1 = 0$

$2(1+\sqrt{3})(1-t^2) + (t+1)(1+t^2) = 0, \; t = \tan\theta$

$\therefore (1+t)\left[(2+2\sqrt{3})(1-t) + (1+t^2)\right] = 0$

$t = -1$ ಅಥವಾ

$t^2 - (2+2\sqrt{3})t + 3 + 2\sqrt{3} = 0$

$t = \sqrt{3} + 2,\ \sqrt{3}$

$\tan\theta = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore\ \theta = n\pi - \frac{\pi}{4},\ n \in I$

$\tan\theta = \sqrt{3} + 2,\ \sqrt{3}$ ಆದಾಗ

$\theta = \alpha,\ \beta$ ಎಂದಿದ್ದರೆ,

$\theta = l\pi + \alpha,\ \theta = m\pi + \beta$ ಆಗುವುವು.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.1

ಈ ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ—

1 $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = \sqrt{3}$

2 $\cos\theta + \cot\theta + \cos 3\theta = 0$

3 $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

4 $\tan\theta + \sec\theta = \sqrt{3}$

5 $\tan\theta + \tan 2\theta + \sqrt{3}\tan\theta\tan 2\theta = \sqrt{3}$

6 $\cos 2\theta = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

7 $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = 3\sec^4\theta$

8 $\cos 3\theta + 2\cos\theta = 0$

9 $\sin^2 n\theta - \sin^2(n-1)\theta = \sin^2\theta$

10 $4\cos\theta - 3\sec\theta = \tan\theta$

ಎರಡನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯ

ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

2.1 ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು— $y = f(x)$ ಎಂಬ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. y ಯನ್ನು x ನ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದು ನಾವು ಇದನ್ನು ಓದುತ್ತೇವೆ. ಈ ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ x ಗೆ ವಿವಿಧ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿ y ಯ ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದಲ್ಲಿ ವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯು ತಲೆದೋರುವುದು. ಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಇಂತಹ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳ ಕೂಲಂಕಷ ಅಭ್ಯಾಸ ನಡೆಸುವರು.

$y = f(x)$ ನ್ನು x ನಲ್ಲಿ ಏಕಮೌಲ್ಯ ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. x ನ ಒಂದು ಬೆಲೆಗೆ y ಯ ಒಂದು ಬೆಲೆ ಇದೆ ಎಂದು ಇದರ ಅರ್ಥ.

$y = ax^2 + bx + \sin x$ ಇಂತಹ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ. ಇಲ್ಲಿ x ನ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬೆಲೆಗೆ y ಯ ಒಂದು ಬೆಲೆ ಮಾತ್ರ ದೊರೆಯುವುದು.

$y = f(x)$ ಸಂಬಂಧದಿಂದ, x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು y ಯಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವೇ ? ಇಂತಹ ಸಂಬಂಧವು y ನಲ್ಲಿ ಏಕಮೌಲ್ಯ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರುವುದೇ, ಇಲ್ಲವೇ ? ಇದು ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆ.

$y = ax + b$ ಆಗಿರುವಾಗ, $x = \dfrac{y-b}{a}$ ಆಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ x, y ಯಲ್ಲಿ ಏಕಮೌಲ್ಯ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ.

$y = ax^2 + bx + c$ ಆಗಿರುವಾಗ,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c-y)}}{2a}$$ ಆಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ y ಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಗೂ, x ಗೆ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿ x, y ಯಲ್ಲಿ ಏಕಮೌಲ್ಯ ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ.

ಹೀಗೆ ಒಂದು ದತ್ತ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವ ದೃಷ್ಟಿಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಅದು ಏಕಮೌಲ್ಯ ಅಥವಾ ಬಹುಮೌಲ್ಯಗಳ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೂಪ ತಳೆಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಕ್ರಿಯೆಯು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯ ಪಡೆದಿದೆ.

$y = f(x)$ ಆಗಿರುವಾಗ,

$x = g(y)$ ಆಗಿರಲಿ.

f ಮತ್ತು g ಗಳು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಸೂಚಿಸುವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನದ ಭಾವನೆಯನ್ನು f^{-1}, g^{-1} ಸಂಕೇತಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

$y = f(x)$ ಆಗಿರುವಾಗ, $x = f^{-1}(y)$

ಆದರೆ, $x = g(y)$ ಆಗಿದೆ

$\therefore\ f^{-1}(y) = g(y)$

ಅದೇ ರೀತಿ, $x = g(y)$ ಆಗಿರುವಾಗ, $y = g^{-1}(x)$

ಆದರೆ, $y = f(x)$

$\therefore\ g^{-1}(x) = f(x)$

ಆದ್ದರಿಂದ, **ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ** $f^{-1} = g$ ಅಥವಾ,
$g^{-1} = f$ ಅಥವಾ,
$fg = 1$

ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ನೆನಪಿನ ಸೌಕರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ಈ ಸಾಂಕೇತಿಕ ನಿರೂಪಣೆ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಬೈಜಿಕನಿಯಮ $f^{-1} = \frac{1}{f}$, $g^{-1} = \frac{1}{g}$ ಎಂದು ಘಾತಗಳ ಗುಣಗಳಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಸೂತ್ರ ಇದು ಅಲ್ಲ ಎಂದು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕು.

2.2 ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು— x ಒಂದು ದತ್ತಕೋನವಾಗಿರುವಾಗ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಬೆಲೆಯೂ ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಗೊತ್ತಿದೆ. ಈಗ, ಬೆಲೆಯು ದತ್ತವಾದಾಗ ಕೋನದ ಬೆಲೆ ಏಕೈಕವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂಬುದು ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ಆಗಿರುವಾಗ

$x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$, $n \epsilon \mathrm{I}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ x ನ ಬೆಲೆ ಏಕೈಕವಲ್ಲ.

ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆ ದತ್ತವಾಗಿರುವಾಗ ಕೋನದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ.

$y = \sin x$ ಎಂದಿದ್ದರೆ, $x = \sin^{-1} y$

$y = \cos x$ ಎಂದಿದ್ದರೆ, $x = \cos^{-1} y$, ಇತ್ಯಾದಿ.

$\sin^{-1} y$, $\cos^{-1} y$, $\tan^{-1} y$, $\cot^{-1} y$, $\sec^{-1} y$, $\operatorname{cosec}^{-1} y$ ಇವು ಆರು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು. $\sin^{-1} y$ ಯನ್ನು sine inverse y ಅಥವಾ sine minus one y ಅಥವಾ arc sine y ಎಂದು ಇಂಗ್ಲಿಷಿನಲ್ಲಿಯೂ, ಪ್ರತಿಲೋಮ sine y ಎಂದು ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿಯೂ ಓದುತ್ತೇವೆ.

$\sin x$, $\cos x$ ಗಳು $(-1, 1)$ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ $\sin^{-1} y$, $\cos^{-1} y$ ಗಳಲ್ಲಿ $|y| \leq 1$ ಆಗಿರಬೇಕು. $\tan^{-1} y$, $\cot^{-1} y$ ಗಳಲ್ಲಿ y ಗೆ ಯಾವ ನಿರ್ಬಂಧವೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. $\sec^{-1} y$ ಮತ್ತು $\operatorname{cosec}^{-1} y$ ಗಳಲ್ಲಿ y ಯ ಬೆಲೆ $(-1, 1)$ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಇರಬಾರದು.

ಹೀಗೆ ಬಹು ಬೆಲೆಗಳಿರುವ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮುಖ್ಯ ಗುಣವನ್ನು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ.

$\sin^{-1} y$, $\tan^{-1} y$, $\cot^{-1} y$, $\operatorname{cosec}^{-1} y$ ಇವುಗಳ ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಬೆಲೆಗಳ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಬೆಲೆ ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ. ಆಯಾ ಉತ್ಪನ್ನದ ಗ್ರಾಫ್ ಬಿಡಿಸಿ ಈ ಮಾತಿನ ಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ಮುಂದಟ್ಟುಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3},\ n \epsilon \mathrm{I}$$

ಅಂದರೆ, $-\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \ldots$

ಇಲ್ಲಿ $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ.

$$\tan^{-1}(-1) = n\pi - \frac{\pi}{4},\ n \epsilon \mathrm{I}$$

ಅಂದರೆ, $-\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \ldots$

ಇಲ್ಲಿ $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{4}$ ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ.

$$\operatorname{cosec}^{-1}(-\sqrt{2}) = n\pi + (-1)^n \left(-\frac{\pi}{4}\right),\ n \epsilon \mathrm{I}$$

ಅಂದರೆ, $-\frac{3\pi}{4}, \ -\frac{\pi}{4}, \ \frac{5\pi}{4}, \ldots.$

ಇಲ್ಲಿ $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}, \ -\frac{\pi}{4}$ ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ.

ಮೇಲೆ ಉದಾಹರಿಸಿರುವ ಏಕೈಕ ಬೆಲೆಗಳು ಆಯಾ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಸಾಂಖಿಕ ಬೆಲೆಗಳೂ ಆಗಿವೆ ಎಂಬುದು ಗಮನಾರ್ಹ. ಹೀಗೆ, ಪ್ರತಿಲೋಮ sine, tangent, cotangent, cosecant ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಬೆಲೆಗಳ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವ (ಅಂದರೆ ಸಾಂಖಿಕವಾಗಿ ಕನಿಷ್ಠವಾಗಿರುವ) ಏಕೈಕ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆಯಾ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನದ **ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆ**ಯೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಸೂಚಿಸಲು ಬಯಸಿದಾಗ ಆ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು (ಇಂಗ್ಲಿಷಿನ) ಚಿಕ್ಕ ಅಕ್ಷರದಿಂದಲೂ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಬಯಸಿದಾಗ ದೊಡ್ಡ ಅಕ್ಷರದಿಂದಲೂ ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವುದು ವಾಡಿಕೆ.

ಹಿಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಈ ಸಂಪ್ರದಾಯದ ಪ್ರಕಾರ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು :

$$\text{Sin}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Tan}^{-1}(-1) = n\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{Cosec}^{-1}(-\sqrt{2}) = n\pi + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4}$$

$$\text{cosec}^{-1}(-\sqrt{2}) = -\frac{\pi}{4}$$

ಪ್ರತಿಯೊಂದು cosine ಮತ್ತು secant ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಬೆಲೆಗಳ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ $(0, \pi)$ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವ (ಅಂದರೆ ಕನಿಷ್ಠ ಧನ ಬೆಲೆಯು) ಏಕೈಕ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆಯಾ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನದ ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆಯೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಹಿಂದಿನಂತೆಯೇ,

$$\text{Cos}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6},\ n \in \text{I}$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

ಸೂಚನೆ: $\sin^{-1} x$ ಮತ್ತು $(\sin x)^{-1}$ ಇವು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು. $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x}$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ

$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

$\sin^{-1} x = \theta$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\therefore\ \sin\theta = x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$\therefore\ \frac{\pi}{2} - \theta = 2n\pi \pm \cos^{-1} x,\quad n \in \text{I}$

$x > 0$ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ,

$-\frac{\pi}{2} < \sin^{-1} x < \frac{\pi}{2}$ ಮತ್ತು $0 < \cos^{-1} x < \pi$

ಆಗಿರುವಂತೆ n ನ ಬೆಲೆಯನ್ನೂ $\cos^{-1} x$ ನ ಹಿಂದಿರುವ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನೂ ಆರಿಸಬೇಕು. $n = 0$, ಚಿಹ್ನೆಯು $+$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ.

$\therefore\ \frac{\pi}{2} - \theta = +\cos^{-1} x$

$\therefore\ \frac{\pi}{2} = \theta + \cos^{-1} x = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x$

$x < 0$ ಆದಾಗಲೂ ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

(2) $\tan^{-1} a + \tan^{-1} b = n\pi + \tan^{-1}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ $a, b, ab - 1$ ಎಲ್ಲವೂ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವಾಗ $n = 1$; $a, b, 1 - ab$ ಎಲ್ಲವೂ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವಾಗ $n = -1$; ಬೇರೆಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ $n = 0$ ಆಗಿದೆ.

$\alpha = \tan^{-1} a, \beta = \tan^{-1} b, \gamma = \tan^{-1} \dfrac{a+b}{1-ab}$ ಎಂದಿರಲಿ.

$$\therefore \; \tan \alpha = a, \; \tan \beta = b, \; \tan \gamma = \frac{a+b}{1-ab}$$

ಈಗ, $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{a+b}{1-ab} = \tan\gamma$

$$\therefore \; \alpha + \beta = n\pi + \gamma, \quad n \in I$$

ಇಲ್ಲಿ n ನ ಬೆಲೆ a, b ಗಳ ಸ್ಥಿತಿಗಳನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ.

ಸಂದರ್ಭ 1 $a, b, 1-ab$ ಎಲ್ಲವೂ ಧನಾತ್ಮಕವಾದರೆ,

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \; 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \; 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

$\therefore \; -\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta - \gamma = n\pi < \pi$

$\therefore \; n = 0$

ಸಂದರ್ಭ 2 $a, b, 1-ab$ ಎಲ್ಲವೂ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0, \; -\frac{\pi}{2} < \beta < 0, \; 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \; -\dfrac{3\pi}{2} < \alpha + \beta - \gamma = n\pi < 0$

$\therefore \; n = -1$

ಸಂದರ್ಭ 3 $a, b, ab-1$ ಎಲ್ಲವೂ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \; 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < \gamma < 0$

ಆಗ, $0 < \alpha + \beta - \gamma = n\pi < \dfrac{3\pi}{2}$

$\therefore \; n = 1$

ಸಂದರ್ಭ 4 $a, b, ab-1$ ಎಲ್ಲವೂ ಋಣಾತ್ಮಕವಾದರೆ,

$-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0, \; -\frac{\pi}{2} < \beta < 0, -\frac{\pi}{2} < \gamma < 0,$

$\therefore \; -\pi < \alpha + \beta - \gamma = n\pi < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \; n = 0$

ಸಂದರ್ಭ 5 $a > 0,\ b < 0,\ a + b > 0$ ಆದಾಗ

$-\pi > \alpha + \beta - \gamma = n\pi < \frac{\pi}{2}$

$\therefore n = 0$

ಸಂದರ್ಭ 6 $a > 0,\ b < 0,\ a + b < 0$ ಆದಾಗ

$-\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta - \gamma = n\pi < \pi$

$\therefore\ n = 0$

ಇದೇ ರೀತಿ $a < 0$, ಮತ್ತು $b > 0$ ಆದಾಗಲೂ $n = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

(3) $\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x}\right) = \tan^{-1}(-7) + \pi$

ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಎರಡು ಬದಿಗಳ tangent ತೆಗೆದರೆ,

$$\frac{\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x}}{1 - \left(\frac{x+1}{x-1}\right)\left(\frac{x-1}{x}\right)} = -7$$

$\therefore\ x = 2$

ಅಭ್ಯಾಸ 2.1

ಸಾಧಿಸಿರಿ—

1 $\sin^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{8}{17} + \sin^{-1}\frac{36}{85} = \frac{\pi}{2}$

2 $\tan^{-1}\frac{1}{3} - \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{3}{11}$

3 $2\tan^{-1}\frac{1}{8} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + 2\tan^{-1}\frac{1}{5} = \frac{\pi}{4}$

4 $\tan^{-1}\frac{120}{119} = 2\sin^{-1}\frac{5}{13}$

5 $\tan^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{3}{5} - \tan^{-1}\frac{8}{19} = \frac{\pi}{4}$

6 $2\cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{13}} + \cot^{-1}\frac{16}{63} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{7}{25} = \pi$

7 $\cot^{-1}\frac{ab+1}{a-b} + \cot^{-1}\frac{bc+1}{b-c} + \cot^{-1}\frac{ca+1}{c-a} = 0$

8 $\tan^{-1} n + \cot^{-1}(n+1) = \tan^{-1}(n^2+n+1)$

9 $2\tan^{-1}\left[\tan\frac{\alpha}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\right] = \tan^{-1}\left(\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta+\cos\alpha}\right)$

10 $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$

ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ—

11 $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{3}$

12 $\tan^{-1}(x-1) + \tan^{-1}x + \tan^{-1}(x+1) = 0$

13 $\tan^{-1}\left(x+\frac{2}{x}\right) - \tan^{-1}\left(x-\frac{2}{x}\right) = \tan^{-1}\frac{4}{x}$

14 $2\tan^{-1}x + \tan^{-1}(x+4) = \frac{5\pi}{4}$

15 $y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$

ಎಂದಿದ್ದರೆ, $x^2 = \sin 2y$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

16 $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$. $\cot^{-1}x$, $\sec^{-1}x$, $\text{cosec}^{-1}x$ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗ್ರಾಫುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಮೂರನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯ

ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳು

3.1 ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು— $ax^2 + bx + c = 0$ ಎನ್ನುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಶೋಧಕವು ($\triangle = b^2 - 4ac$) ಋಣಾತ್ಮಕವಾದಾಗ ಮೂಲ ಗಳು ವಾಸ್ತವವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\sqrt{-1}}{2a}$$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\,.\,i}{2a}$$

ಎಂದು ಬರೆದು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ i ಎನ್ನುವ ಒಂದು ಹೊಸ ಸಂಕೇತವನ್ನು ಬಳಸಿದ್ದೇವೆ.

$$i = \sqrt{-1}, \quad \therefore \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i,$$

ಇತ್ಯಾದಿ.

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಮೂಲಗಳು

$$-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\, i, \; -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\, i$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ $-\frac{b}{2a}$, $\pm \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ ಎನ್ನುವ ಎರಡು ಭಿನ್ನವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಗಳು i ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸಂಬಂಧಿತವಾಗಿವೆ. ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

a, b ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವಾಗ $(a + ib)$ ಯು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆ. ಇಲ್ಲಿ a ಯನ್ನು ವಾಸ್ತವಭಾಗವೆಂದೂ b ಯನ್ನು ಊಹ್ಯಭಾಗವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$3 + 4i$; $\frac{5}{7} - \frac{2}{5}i$; $-5 - \frac{3}{2}i$; $-6 + 7i$ ಇವು ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ವಾಸ್ತವ, ಮತ್ತು ಊಹ್ಯಭಾಗಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $3, 4$; $\frac{5}{7}, -\frac{2}{5}$; $-5, -\frac{3}{2}$; $-6, 7$.

ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗವೂ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯೂಹದ ಒಂದು ಮೂಲಾಂಶವಾಗಿದೆ ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಆದ್ದರಿಂದ $a+ib$ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ $a, b \in R$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಎಲ್ಲ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ರಚಿತವಾದ ಗಣವನ್ನು C ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$\therefore\ C = \{a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \ldots\}$$

ಅಥವಾ $C = \{ z \mid z$ ಒಂದು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆ$\}$

ಇಲ್ಲಿ $b_1, b_2, \ldots$ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ 0 ಯೂ ಇದರಲ್ಲಿ ಸೇರಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು ಸಾಧ್ಯ.

$3 = 3 + 0.i,\ -\frac{7}{2} = -\frac{7}{2} + 0.i$ ಇತ್ಯಾದಿ.

$\therefore$ C ಗಣದ ಗಣಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಇವೆ.

$$\therefore\ R \subset C$$

$$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i, \ldots$$

$i^{-1} = \frac{1}{i} = -i,\ i^{-2} = \frac{1}{i^2} = -1 \ldots$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$i^n = \pm i$ ಅಥವಾ ± 1, $n \in I$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

$\therefore\ a_1 + a_2 i + a_3 i^2 + a_4 i^3 + \ldots + a_n i^n$ ಎಂಬ i ಯಲ್ಲಿ ಬರೆದಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಪದಿಯು $A + iB$, $A, B, \in R$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

$\therefore$ ಬಹುಪದಿ $= (a_1 - a_3 + a_5 - \ldots) + i(a_2 - a_4 + a_6 \ldots)$
$\equiv A + iB.$

3.2 ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿತದ ಪರಿಕರ್ಮಗಳು—

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ—

(a) ಸಮಾನತೆ $a + ib = c + id$ ಆದಾಗ $a = c,\ b = d$

(b) ಕೂಡುವಿಕೆ $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$

(c) ಕಳೆಯುವಿಕೆ $(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$

(d) ಗುಣಾಕಾರ $(a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)$

(e) ಭಾಗಾಕಾರ $\dfrac{a+ib}{c+id} = \dfrac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}$

$$= \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

(f) ಅನುವರ್ತಿ $(a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$ ಇನ್ನೊಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ. $a+ib$, $a-ib$ ಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಅನುವರ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. $(a+ib)$ ಯ ಅನುವರ್ತಿ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯು $(a-ib)$ ಯೂ, $(a-ib)$ ಯ ಅನುವರ್ತಿ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯು $(a+ib)$ ಯೂ ಆಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ

z ಎಂಬುದು $x+iy$ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ, $\bar{z}$ ಎಂಬುದು ಅದರ ಅನುವರ್ತಿ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆ $x-iy$ ಯನ್ನೂ ಸೂಚಿಸಲಿ. ಆಗ,

$$z\bar{z} = x^2+y^2$$

(1) $\bar{z}_1\bar{z}_2 = (x_1-iy_1)(x_2-iy_2)$

$$= (x_1x_2-y_1y_2) - i(x_1y_2+x_2y_1)$$

(2) $\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \dfrac{x_1-iy_1}{x_2-iy_2} = \dfrac{(x_1-iy_1)(x_2+iy_2)}{x_2^2+y_2^2}$

$$= \frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_1y_2-x_2y_1)}{x_2^2+y_2^2}$$

(3) $z^2 = 2i$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

$(x+iy)^2 = 2i$

$x^2-y^2+2i(xy-1) = 0$

$\therefore\ x^2-y^2 = 0,\ xy-1 = 0$

$\therefore\ x = 1,\ y = 1$ ಅಥವಾ $x = -1,\ y = -1$

3.3 ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ನಿಯೋಜಿತ ಯುಗ್ಮಗಳು—ನಿಯೋಜಿತ ಯುಗ್ಮ ಎಂಬ ಭಾವನೆಯನ್ನು ನಾವು ಮೊದಲು ತಿಳಿದುಕೊಂಡು ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತೇವೆ. a ಮತ್ತು b ಎನ್ನುವ ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ನಮಗೆ (a, b) ಎಂಬ ಒಂದು ವಸ್ತು ಬೇಕಾಗಿದೆ. ಆ ವಸ್ತುಗಳ ಗುಣವು

$(a, b) = (c, d)$ ಎಂದಾಗಿದ್ದರೆ $a = c, b = d$ ಆಗಿರಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತದ ಒಂದು ಬಿಂದು P (x, y) ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. 3, 4 ಎಂಬ ಎರಡು ಪರಿಮಾಣಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಈ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಾದರೆ,

$(x, y) = (3, 4)$, ಅಥವಾ

$x = 3,\ y = 4$

ಹೀಗೆ ದೊರೆಯುವ (x, y) ನ್ನು ಅಥವಾ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯ (a, b) ಯನ್ನು ನಿಯೋಜಿತ ಯುಗ್ಮ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ $(3, 4) \neq (4, 3)$

$\therefore (a, b) \neq (b, a)$. ಏಕೆಂದರೆ ನಿಯೋಜಿತ ಯುಗ್ಮದಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಅರ್ಥವಿದೆ.

ಪುನಃ, $(a, b) \neq \{a, b\}$. ಏಕೆಂದರೆ,

ಗಣ $\{a, b\}$ = ಗಣ $\{b, a\}$ = ಗಣ $\{a, a, b, b, a\}$

ಹೀಗೆ ಒಂದು ನಿಯೋಜಿತ ಯುಗ್ಮವನ್ನು ಬರೆಯುವುದರಿಂದ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೊದಲು ಬರಬೇಕು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮತ್ತೆ ಬರಬೇಕು ಎಂಬುದು ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧವಾಗುವುದು. ಇದೊಂದು ವಿಶೇಷ ಸೌಕರ್ಯ. (a, b) ಎಂಬ ನಿಯೋಜಿತ ಯುಗ್ಮದಲ್ಲಿ a ಯು ಮೊದಲನೇ ನಿರ್ದೇಶಕ, b ಯು ಎರಡನೇ ನಿರ್ದೇಶಕ.

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದ ಒಂದು ನಿಯೋಜಿತ ಯುಗ್ಮವನ್ನು ಎರಡು ಪರಿಮಾಣಗಳ ಸದಿಶ (two-dimensional vector) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಎರಡು ಪರಿಮಾಣಗಳ ಸದಿಶ ಒಂದು ಸಮತಲದ ಮೇಲಿದೆ. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯ P (3, 4) ಬಿಂದುವನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಸಮತಲವು P ಯಂತಹ ನಿಯೋಜಿತ ಯುಗ್ಮಗಳಿಂದ ರಚಿತವಾಗಿದೆಯಷ್ಟೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಮತಲವು ಎರಡು ಪರಿಮಾಣಗಳ ಸದಿಶ ಇರುವ ಆಕಾಶ (Space) ಆಗಿದೆ. ಈ ಕಾರಣದಿಂದ ಸಮತಲವನ್ನು ಎರಡು ಪರಿಮಾಣಗಳ ಸದಿಶಾಕಾಶ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಪರಿಮಾಣಗಳ ಸದಿಶಾಕಾಶ ಎನ್ನುವುದು ನಿಯೋಜಿತ ಸಂಖ್ಯಾಯುಗ್ಮಗಳ ಒಂದು ಗಣವಾಗಿದೆ. ಅದು $\{(x, y) | x, y \in R\}$. ಈ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಮೂರು ಮತ್ತು ಹೆಚ್ಚು ಪರಿಮಾಣಗಳಿಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು.

ಇಷ್ಟು ಹಿನ್ನೆಲೆಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಒಂದು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯು ಒಂದು ನಿಯೋಜಿತ ಸಂಖ್ಯಾಯುಗ್ಮ, ಅದೊಂದು ಎರಡು ಪರಿಮಾಣದ ಸದಿಶ ಎಂದು ವಿವರಿಸಬಹುದು.

$(a + ib)$ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು (a, b) ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ $a, b \in R$. ಒಂದು ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಾಸ್ತವ ಭಾಗವು ನಿಯೋಜಿತ ಯುಗ್ಮದ ಮೊದಲಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ (a) ; ಊಹ್ಯಭಾಗವು ಎರಡನೆಯ ನಿರ್ದೇಶಕ (b).

ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳು ರಚಿಸುವ ಎರಡು ಪರಿಮಾಣಗಳ ಸದಿಶಾಕಾಶವನ್ನು ಮಿಶ್ರಸಮತಲವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $x + iy$ ಎನ್ನುವ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $z = (x, y) \epsilon C$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. C ಯು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ. ಇಲ್ಲಿ $x, y \epsilon R, i^2 = -1$.

$R(z)$ ಅಂದರೆ z ನ ವಾಸ್ತವ (real) ಭಾಗವೆಂದೂ, $I(z)$ ಅಂದರೆ z ನ ಊಹ್ಯಭಾಗ (imaginary) ವೆಂದೂ ಅರ್ಥ. $\therefore R(z) = x;\quad I(z) = y$. i ಯನ್ನು ಊಹ್ಯಮಾನವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ

(1) ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು (x, y) ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ:

(a) $(3, 4)^2 . (2, -1) = (3 + 4i)^2 (2 - i)$

$$= (-7 + 24i)(2 - i) = 10 + 55i = (10, 55)$$

(b) $\dfrac{(3, 7)}{(3, 5)} = \dfrac{3 + 7i}{3 + 5i} = \dfrac{(3 + 7i)(3 - 5i)}{34}$

$$= \frac{44 + 6i}{34} = \left(\frac{22}{17}, \frac{3}{17}\right)$$

(2) $|z| = |x + iy| = +\sqrt{x^2 + y^2}$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\sqrt{x^2 + y^2}$ ನ್ನು ಸದಾ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೇ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು z ನ ಮಾಡುಲಸ್ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

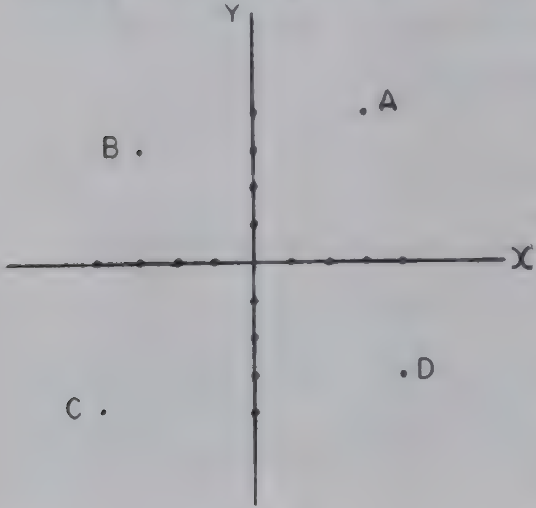
$$= \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

(3) $|z| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

$$|\bar{z}| = |x_1 - iy_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

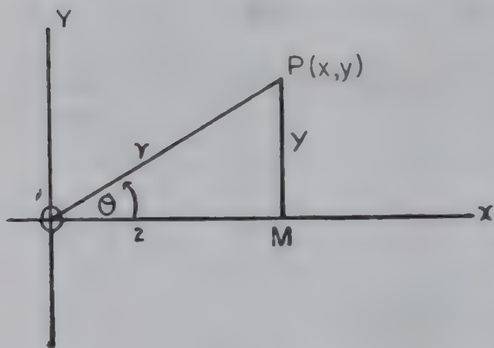
$$\therefore |z| = |\bar{z}|$$

3.4 ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ನಿರೂಪಣೆ– ಮಿಶ್ರಸಮತಲ— ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆ $z=(x, y) \in C$ ಒಂದು ನಿಯೋಜಿತ ಸಂಖ್ಯಾಯುಗ್ಮವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತದ ಸಂಪ್ರದಾಯದಂತೆ ಒಂದು ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. ಇಂತಹ ನಿರೂಪಣೆ ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ (3, 4) ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯು ಒಂದು ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು; ವಿಲೋಮವಾಗಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಅನುರೂಪ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯು ಒಂದು ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದು. ಚಿತ್ರ 3.1ರಲ್ಲಿ A (3, 4), B (– 3, 3), C (– 4, –4), D (4,–3) ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಅಕ್ಷವೆಂದೂ, y-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಊಹ್ಯ ಅಕ್ಷವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಾಸ್ತವ ಭಾಗವನ್ನು ವಾಸ್ತವಾಕ್ಷದ ಮೇಲೂ, ಊಹ್ಯ ಭಾಗವನ್ನು ಊಹ್ಯಾಕ್ಷದಮೇಲೂ ಅಳೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರುವ ಈ ಸಮತಲದ ಹೆಸರು ಮಿಶ್ರಸಮತಲ ಅಥವಾ ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಸಮತಲ.



ಚಿತ್ರ 3.1

ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆ $z=(x, y) \in C$ ಯನ್ನು ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ P ಎಂಬ ಬಿಂದು ಗುರುತಿಸಲಿ. ಆಗ P ಯ ಕಾರ್ಟೇಸಿಯನ್ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (x, y) ಆಗುವುವು. ಅದರ ಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (r, θ) ಎಂದಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 3.2

$$\therefore\ x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

ಇಲ್ಲಿ $r \geqslant 0$. $r=0$ ಆದಾಗ P ಯು ಮೂಲಬಿಂದು O ನಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾಗುವುದು. θ ವು 0 ಯಿಂದ 2π ವರೆಗೆ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳನ್ನೂ ಪಡೆಯುವುದು.

$$\therefore\ z=(x, y)=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

ಯಾವುದೇ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಈ r, θ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು z ನ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ರೂಪವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಇಲ್ಲಿ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$, z ನ ಮಾಡುಲಸ್

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{I(z)}{R(z)}$$

θ ವನ್ನು z ನ ಕೋಣಾಂಕವೆಂದು (argument or amplitude) ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$\theta = \arg z$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಕೋಣಾಂಕವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿರುವ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅದು ಬಹು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿದೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ ಅಥವಾ

$\cos^{-1}\frac{x}{r}$, $\sin^{-1}\frac{y}{r}$ ಇವೆರಡಕ್ಕೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವ θ ದ ಏಕೈಕ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೋಣಾಂಕದ ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆ ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ $(-1, 1) = -1 + i$

$$= \sqrt{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\equiv \sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ಇಲ್ಲಿ θ ದ ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆ $\frac{3\pi}{4}$ ಆಗಿದೆ.

$$\therefore \arg(-1, 1) = \frac{3\pi}{4}$$

ಅದೇ ರೀತಿ $\text{mod}\,(-1, 1) = |(-1, 1)| = +\sqrt{2}$

$$\sqrt{3} - i = 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right] = 2[\cos\theta + i\sin\theta]$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\text{mod}(\sqrt{3} - i) = |(\sqrt{3}, -i)| = 2$$

$$\arg(\sqrt{3} - i) = -\frac{\pi}{6}$$

3.5 ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿವಿಧ ಪರಿಕರ್ಮ ಗಳು—

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ ದತ್ತ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ.

$x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$,

$x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ ಆಗಿರಲಿ.

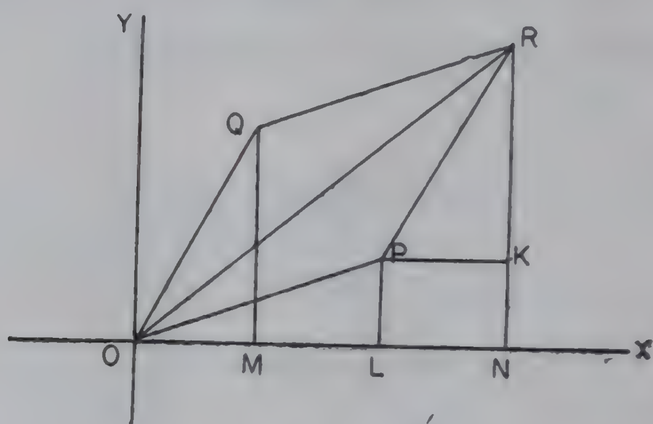
$\therefore\ r_1\cos\theta_1 = x_1,\ r_1\sin\theta_1 = y_1,\ r_1^2 = x_1^2 + y_1^2$

$r_2\cos\theta_2 = x_2,\ r_2\sin\theta_2 = y_2,\ r_2^2 = x_2^2 + y_2^2$

ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ P ಯು z_1 ನ್ನೂ, Q ವು z_2 ನ್ನೂ ಸೂಚಿಸಲಿ.

$\therefore$ OP $= r_1$, OQ $= r_2$. $\angle$POx $= \theta_1$, $\angle$QOx $= \theta_2$

(*a*) ಕೂಡುವಿಕೆ : OPRQ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಗೊಳಿಸಬೇಕು. PL, QM, RN ಗಳು OX ಗೆ ಲಂಬಗಳು.

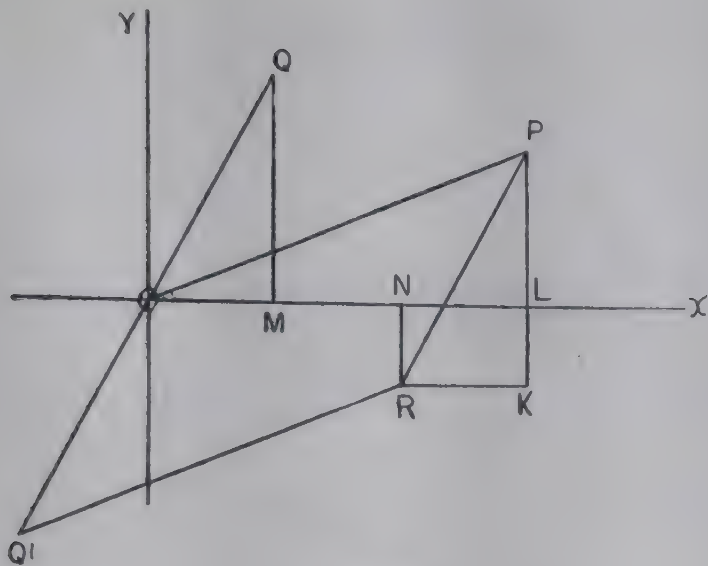


ಚಿತ್ರ 3.3

$$\text{ON} = \text{OL} + \text{LN}$$
$$= \text{OL} + \text{OM} = x_1 + x_2$$
$$\text{NR} = \text{LP} + \text{KR} = \text{LP} + \text{MQ} = y_1 + y_2$$

$\therefore$ R ಬಿಂದು $(z_1 + z_2)$ ನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.

(*b*) ಕಳೆಯುವಿಕೆ : $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$. ಇಲ್ಲಿ z_2 ನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯದೂರ OQ ವನ್ನು ವಿರೋಧ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಅಷ್ಟೇ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ವೃದ್ಧಿಸಬೇಕು. OQ′ = OQ. OQ′RP ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಬೇಕು.



ಚಿತ್ರ 3.4

$$ON = OL - NL$$
$$= OL - OM$$
$$= x_1 - x_2$$

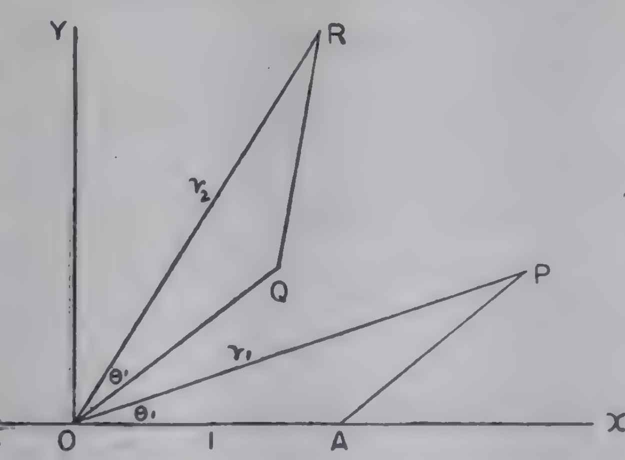
$$NR = -(PK - PL) = (QM - PL) = -(y_2 - y_1) = y_1 - y_2$$

$\therefore$ R ಬಿಂದು $(z_1 - z_2)$ ನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.

(*c*) ಗುಣಾಕಾರ : $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$OA = 1$ ಇರುವಂತೆ A ಯನ್ನು Ox ಮೇಲೆ ಆರಿಸಬೇಕು. $\triangle OAP$ ಗೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿರುವಂತೆ $\triangle OQR$ ನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು. ಅಂದರೆ,



ಚಿತ್ರ 3.5

$$\angle QOR = \angle AOP = \theta_1$$
$$\angle OQR = \angle OAP$$

$$\therefore \angle AOR = \angle AOQ + \angle QOR = \theta_1 + \theta_2$$

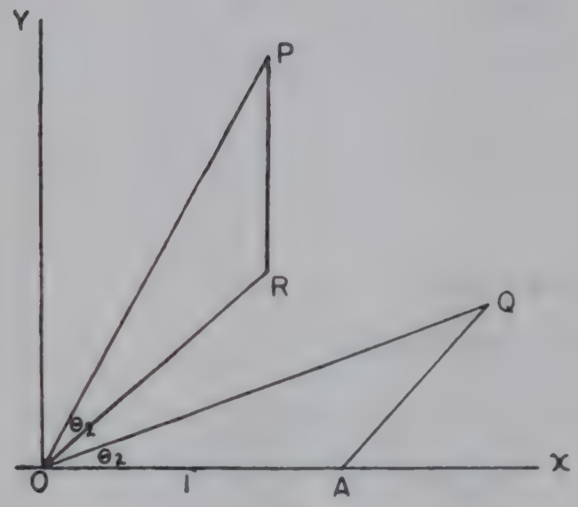
$$\frac{OR}{OQ} = \frac{OP}{OA}$$

$$\therefore OR = r_1 r_2$$

$\therefore$ R ಬಿಂದುವು $r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$ ಬಿಂದುವನ್ನು ಅಂದರೆ $z_1 z_2$ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.

(*d*) ಭಾಗಾಕಾರ : $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$



ಚಿತ್ರ 3.6

ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕಾಗಿದೆಯೋ ಅದನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು A ಗೆ (OA = 1) ಜೋಡಿಸಬೇಕು. OPಯ ಮೇಲೆ ವಿರೋಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ △ OPR ನ್ನು △ OQA ಗೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿ ರಚಿಸಬೇಕು.

$$\angle xOR = \angle xOP - \angle ROP = \theta_1 - \theta_2$$

$$\frac{OR}{OP} = \frac{OA}{OQ}$$

$$\therefore OR = \frac{r_1}{r_2}$$

$\therefore$ R ಬಿಂದುವು $\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$ ಬಿಂದುವನ್ನು ಅಂದರೆ $\dfrac{z_1}{z_2}$ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ

(1) ಚಿತ್ರ 3.3 ರಲ್ಲಿ $\triangle OPR$ ನಿಂದ

$$OP + PR \geqslant OR$$

$$r_1 + r_2 \geqslant OR$$

$|z_1| + |z_2| \geqslant |z_1 + z_2|$. z_1, z_2 ಗಳ ಕೋಣಾಂಕಗಳು ಸಮವಾದಾಗ ಮಾತ್ರ, ಸಮತ್ವದ ಚಿಹ್ನೆ ದೊರಕುತ್ತದೆ.

(2) ಚಿತ್ರ 3.4 ರಲ್ಲಿ $\triangle OPR$ ನಿಂದ

$$OP + PR \geqslant OR$$

$$r_1 + r_2 \geqslant OR$$

$$|z_1| + |z_2| \geqslant |z_1 - z_2|$$

(3) ಚಿತ್ರ 3.5 ರಿಂದ

$$OR = OP \,.\, OQ = r_1 r_2$$

$$\therefore |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$$

(4) ಚಿತ್ರ 3.6 ರಿಂದ

$$OR = \frac{OP}{OQ} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\therefore \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.1

1 ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ $z = (x, y) \in C$ ಆಗಿದೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ—

(a) $|z_1 - z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big|$

(b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$

(c) $|z| = |\bar{z}|$

(d) $|z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + |z_3| + \ldots + |z_n|$

ಸಮತ್ವಚಿಹ್ನೆ ಯಾವಾಗ ದೊರಕುತ್ತದೆ?

(e) $|z_4 - z_1| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_4|$

2 ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು (x, y) ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ—

(a) $(3, 4)^2$, (b) $(5, -1)^3$, (c) $(2, 7)(3, -1)$,

(d) $\dfrac{(3, 7)}{(5, -2)}$, (e) $\left(\dfrac{7}{5}, -\dfrac{4}{3}\right)^2$

(f) $\dfrac{(1, 2)}{(3, -4)} + \dfrac{(2, -1)}{(0, 5)}$

3 ಸಾಧಿಸಿರಿ—

(a) $\dfrac{(10, 0)}{(1, -1)\ (2, -1)\ (3, -1)} = (0, 1)$

(b) $(1, -1)^2 = (0, -2)$

(c) $(1, -1)^4 = -4$

(d) $\dfrac{\overline{(2, 1)^2}}{(3, -4)} = 1$

4 $\cos\theta + i\sin\theta \equiv \operatorname{cis}\theta$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(a) $\operatorname{cis}\theta_1 \operatorname{cis}\theta_2 \operatorname{cis}\theta_3 \ldots \operatorname{cis}\theta_n = \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)$

(b) $\dfrac{\operatorname{cis}\theta_1}{\operatorname{cis}\theta_2} = \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$

(c) $(\operatorname{cis}\theta)^n = \operatorname{cis} n\theta$, n ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ.

3.6 ಡಿಮೋಯ್ವರನ ಪ್ರಮೇಯ— nನ ಎಲ್ಲ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ ಇದರ ಒಂದು ಬೆಲೆ $\cos n\theta + i\sin n\theta$.

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)$ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

$$\therefore (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_3 + i\sin\theta_3)$$
$$= \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸಿ

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_3 + i\sin\theta_3)\dots\dots\times(\cos\theta_n + i\sin\theta_n) = \cos(\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_n)$$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

I ಇಲ್ಲಿ $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \dots = \theta_n = \theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆಗ n ಪದಗಳಿರುವುವು.

$$\therefore (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta,$$ n ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ.

II n ಒಂದು ಧನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿರಲಿ. $n = \frac{p}{q}$ ಎಂದಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ p ಮತ್ತು q ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅಪವರ್ತನರಹಿತ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು.

$$\left(\cos\frac{p\theta}{q} + i\sin\frac{p\theta}{q}\right)^q = \cos\left(\frac{p\theta}{q}q\right) + i\sin\left(\frac{p\theta}{q}q\right)$$
$$= \cos p\theta + i\sin p\theta$$
$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^p$$

$\therefore \cos\frac{p\theta}{q} + i\sin\frac{p\theta}{q}$ ಎಂಬುದು $(\cos\theta + i\sin\theta)^{p/q}$ ನ ಒಂದು ಬೆಲೆ. ಈಗ $\frac{p}{q} = n$

$\therefore \cos n\theta + i\sin n\theta$ ಎಂಬುದು $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ ನ ಒಂದು ಬೆಲೆ.

III n ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಋಣ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ. $n = -m$ ಎಂದಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ m ಧನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-m}$$
$$= \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^m} = \frac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta}$$

(ಒಂದು ಬೆಲೆ)

$$\therefore (\cos\theta + i\sin\theta) = \frac{\cos m\theta - i\sin m\theta}{(\cos m\theta + i\sin m\theta)(\cos m\theta - i\sin m\theta)}$$
$$= \frac{\cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta)}{\cos^2 m\theta + \sin^2 m\theta}$$
$$= \cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta)$$

$\therefore (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$, (ಒಂದು ಬೆಲೆ)

IV n ಯಾವುದೇ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ ಡಿಮೋಯ್ವರನ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಾಧನೆಯು ವಿಶ್ಲೇಷಣಗಣಿತವಿಭಾಗಕ್ಕೆ ಸೇರಿದುದಾಗಿದೆ. ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಡಿಮೋಯ್ವರನ ಪ್ರಮೇಯವು n ನ ಎಲ್ಲ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಸೂಚನೆ: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

$= \cos n(2r\pi + \theta) + i\sin n(2r\pi + \theta)$ ಇಲ್ಲಿ $r \in \mathrm{I}$

$\therefore (\cos\theta + i\sin\theta)^n$ ನ ವಿಸ್ತರಣೆಗೆ ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಬೆಲೆಗಳಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ

(1) ಸರಳೀಕರಿಸಿ: $\left(\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}\right)^n$

$$\left(\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}\right)^n = \left(\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}-2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\right)^n$$

$$= \left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}}\right)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

$$= \cos n\theta + i\sin n\theta$$

(2) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0$

ಆಗಿದ್ದರೆ, $\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$

$\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 3\sin(\alpha+\beta+\gamma)$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

$a = \text{cis}\,\alpha,\ b = \text{cis}\,\beta,\ c = \text{cis}\,\gamma$ ಎಂದಿರಲಿ.

$a + b + c = (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$

$+ i(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 0$ (ದತ್ತವಾಗಿದೆ.)

$\therefore a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (ಬೀಜಗಣಿತದಿಂದ)

$\text{cis}\,3\alpha + \text{cis}\,3\beta + \text{cis}\,3\gamma = 3\,\text{cis}\,\alpha\,\text{cis}\,\beta\,\text{cis}\,\gamma = 3\,\text{cis}(\alpha+\beta+\gamma)$

∴ ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಊಹ್ಯಭಾಗಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಸಮೀಕರಿಸುವುದರಿಂದ

$$\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 3\cos(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 3\sin(\alpha + \beta + \gamma)$$

(3) ಸರಳೀಕರಿಸಿ—

$$\frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{7/2}\ (\cos 3\theta - i\sin 3\theta)^5}{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^{-3/4}\ (\cos 5\theta - i\sin 5\theta)^{5/3}}$$

ದತ್ತ ಉತ್ಪನ್ನ $= \dfrac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{7/2}\ .\ (\cos\theta + i\sin\theta)^{-15}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{-32}\ (\cos\theta + i\sin\theta)^{-25/3}}$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^{7/2-15+3/2+25/3}$$

$$= \cos\frac{5}{3}\theta - i\sin\frac{5}{3}\theta$$

(4) $x_r = \cos\dfrac{\pi}{2^r} + i\sin\dfrac{\pi}{2^r}$ ಎಂದಿದ್ದರೆ,

$x_1x_2x_3 \ldots \infty = \cos\pi$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

$$x_1x_2x_3 \ldots . \infty = \text{cis}\frac{\pi}{2} \times \text{cis}\frac{\pi}{2^2} \times \text{cis}\frac{\pi}{2^3} \times \ldots . \infty$$

$$= \text{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2^2} + \frac{\pi}{2^3} + \ldots . \infty\right)$$

$$= \text{cis}\,\pi = \cos\pi + i\sin\pi = \cos\pi$$

(5) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

$$(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x + 1) = x^5 + 1$$

∴ $x^5 + 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

$$x^5 = -1 = \cos(2r + 1)\pi + i\sin(2r+1)\pi,\ r\epsilon \text{I}$$

$$\therefore\ x = \cos\frac{2r+1}{5}\pi + i\sin\frac{2r+1}{5}\pi$$

$r = 0, 1, 2, \ldots$ ಬೆಲೆ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$\text{cis}\frac{\pi}{5},\ \text{cis}\frac{3\pi}{5},\ \text{cis}\frac{5\pi}{5},\ \text{cis}\frac{7\pi}{5},\ \text{cis}\frac{9\pi}{5},\ \ldots$$

ದೊರೆಯುವುವು. ಇವುಗಳ ಪೈಕಿ cis $\frac{5\pi}{5} = \text{cis}\,\pi = -1$, $(x+1)$ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ನೀಡುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಘಾತದ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು

$$\text{cis}\,\frac{\pi}{5},\ \text{cis}\,\frac{3\pi}{5},\ \text{cis}\,\frac{7\pi}{5},\ \text{cis}\,\frac{9\pi}{5}$$

$$\left(\text{cis}\,\frac{11\pi}{5} = \text{cis}\,\frac{\pi}{5},\ \text{cis}\,\frac{13\pi}{5} = \text{cis}\,\frac{3\pi}{5},\ \text{ಇತ್ಯಾದಿ}\right)$$

3.7 ಘಾತ ಮೂಲಗಳ ಶೋಧನೆ—

1 ರ ವರ್ಗಮೂಲಗಳು ± 1 ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

1 ರ ಘನ ಮೂಲ $+1$ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

1 ರ ಚತುರ್ಥ ಮೂಲ ± 1 ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಹೀಗೆಯೇ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತ 1 ರ ಎಷ್ಟನೇ ಮೂಲವನ್ನು ತೆಗೆದರೂ ಅದು ± 1 ಕ್ಕಿಂತ ಬೇರೆ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಅಲ್ಲ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

ಇದೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು. 1 ರ ವರ್ಗಮೂಲಗಳು $x^2 - 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾಗಿವೆ; ಘನ ಮೂಲಗಳು $x^3 - 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾಗಿವೆ; ಇತ್ಯಾದಿ. ಆದರೆ x ನಲ್ಲಿ n ನೇ ಘಾತದ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ n ಮೂಲಗಳಿರಬೇಕೆಂದು ಬೀಜಗಣಿತದಿಂದ ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $x^n - 1 = 0$ (n ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ) ಸಮೀಕರಣ 1 ರ n ವಿವಿಧ ಮೂಲಗಳನ್ನು ನೀಡುವುದು. n ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ ± 1 ಮತ್ತು ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ -1 ಎಂದು ದೊರೆಯುವ ಮೂಲಗಳು ಈ n ಮೂಲಗಳಲ್ಲಿ ಅಡಕವಾಗಿರಬೇಕು. ಇವುಗಳ ಶೋಧನೆಯನ್ನು ಡಿಮಾಯ್ವರನ ಪ್ರಮೇಯದ ಅನ್ವಯದಿಂದ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರಮೇಯ: 1 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ n. n ನೇ ಮೂಲಗಳ ಶೋಧನೆ.

x ಇಂತಹ ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿರಲಿ.

$$\therefore\ x^n = 1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi, \quad k \in I$$

$$\therefore\ x = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}$$

k ಗೆ ಯಾವುದೇ n ಕ್ರಮಾನುಗತ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಬಹುದು. ಹೆಚ್ಚು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ ಮೂಲಗಳು ಪುನರಾವರ್ತನೆಗೊಳ್ಳುವುವು. ಗಣನೆಯ

ಸೌಕರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸುತ್ತೇವೆ.

$k = 0$ ಆದಾಗ $x = 1$

$k = 1$ ಆದಾಗ $x = \text{cis}\,\frac{2\pi}{n} = \omega$ ಎಂದಿರಲಿ

$k = 2$ ಆದಾಗ $x = \text{cis}\,\frac{4\pi}{n} = \omega^2$ ಆಗುವುದು

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$k = n-1$ ಆದಾಗ $x = \text{cis}\,\frac{2(n-1)}{n}\pi = \omega^{n-1}$ ಆಗುವುದು.

(1) ಹೀಗೆ 1 ರ n, n ನೇ ಮೂಲಗಳು $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$. ಇಲ್ಲಿ $\omega = \text{cis}\,\frac{2\pi}{n}$. ಇವು ω ಸಾಮಾನ್ಯ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಿರುವ ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ (GP) ಯಲ್ಲಿವೆ.

(2) 1 ರ 3, 3 ನೇ ಮೂಲಗಳು $1, \text{cis}\,\frac{2\pi}{3}, \text{cis}\,\frac{4\pi}{3}$

(3) 1 ರ 4, 4 ನೇ ಮೂಲಗಳು $1, \text{cis}\,\frac{2\pi}{4}, \text{cis}\,\frac{4\pi}{4}, \text{cis}\,\frac{6\pi}{4}$

ಅಥವಾ, $1, i, -1, -i$, ಅಥವಾ $\pm 1, \pm i$

(4) 1ರ 5, 5ನೇ ಮೂಲಗಳು $1, \text{cis}\,\frac{2\pi}{5}, \text{cis}\,\frac{4\pi}{5}, \text{cis}\,\frac{6\pi}{5}, \text{cis}\,\frac{8\pi}{5}$

(5) 1 ರ n ನೇ ಮೂಲವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಅದು

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} \mp i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k \in I$$

$|x| = 1$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ 1 ರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು n, n ನೇ ಮೂಲದ ಮಾಡುಲಸ್ 1 ಆಗಿದೆ. ಆದರೆ ಇವುಗಳ ಕೋಣಾಂಕಗಳು $\frac{2\pi}{n}$ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿರುವ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ (AP) ಯಲ್ಲಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿದರೆ,

ಅವು ಮೂಲಬಿಂದು ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು 1 ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರುವ ಸ್ಥಿರವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವುವು; ಮತ್ತು ಅವು ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯನ್ನು n ಸಮಾನಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುವುವು. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ n ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ಸಮ (regular) n–ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುವು.

ಉದಾಹರಣೆ

(1) -1 ರ 10, 10 ನೇ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi = \cos(2k+1)\pi + i\sin(2k+1)\pi,\ k\epsilon \text{I}$$

$$\therefore\ (-1)^{10/1} = \cos\frac{2k+1}{10}\pi + i\sin\frac{2k+1}{10}\pi$$

$k = 0, 1, 2, \ldots 9$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಬೇಕು.

$\therefore$ -1 ರ 10, 10 ನೇ ಮೂಲಗಳು $\text{cis}\,\frac{\pi}{10}$, $\text{cis}\,\frac{3\pi}{10}$, i, $\text{cis}\,\frac{7\pi}{10}$, $\text{cis}\,\frac{9\pi}{10}$, $\text{cis}\,\frac{11\pi}{10}$, $\text{cis}\,\frac{13\pi}{10}$, $-i$, $\text{cis}\,\frac{17\pi}{10}$, $\text{cis}\,\frac{19\pi}{10}$

(2) $3+4i$ ರ 5, 5 ನೇ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$3 + 4i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ಎಂದಿರಲಿ.

$r\cos\theta = 3,\quad r\sin\theta = 4$

$\therefore\ r = 5$ ಮತ್ತು $\cos\theta = 3/5,\ \sin\theta = 4/5$

θ ದ ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆ α ಎಂದಿರಲಿ.

$$\therefore\ 3 + 4i = 5(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$
$$= 5\left[\cos(2k\pi + \alpha) + i\sin(2k\pi + \alpha)\right]$$

$$\therefore\ (3+4i)^{1/5} = 5^{1/5}\left[\cos\frac{2k\pi+\alpha}{5} + i\sin\frac{2k\pi+\alpha}{5}\right],\ k\epsilon \text{I}$$

$k = 0, 1, 2, 3, 4$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಬೇಕು. ಬೇಕಾದ ಐದು ಮೂಲಗಳು, $5^{1/5}\,\text{cis}\,\frac{\alpha}{5}$, $5^{1/5}\,\text{cis}\,\frac{2\pi+\alpha}{5}$, $5^{1/5}\,\text{cis}\,\frac{4\pi+\alpha}{5}$, $5^{1/5}\,\text{cis}\,\frac{6\pi+\alpha}{5}$,

$$5^{1/5}\,\text{cis}\,\frac{8\pi+\alpha}{5}$$

3.8 $\sin n\theta$, $\cos n\theta$, $\tan n\theta$ (n ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ) ಇವುಗಳ ವಿಸ್ತರಣೆ— $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ ಎಂದು ಗೊತ್ತಿದೆ. n ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಎಡ ಬದಿಯ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = c^n + {}_nC_1 . c^{n-1} is + {}_nC_2 c^{n-2} i^2 s^2 + {}_nC_3 . c^{n-3} i^3 s^3 + \ldots + i^n s^n$$

$(c \equiv \cos\theta, s \equiv \sin\theta)$

$$\therefore \cos n\theta + i\sin n\theta = (c^n - {}_nC_2 c^{n-2} s^2 + {}_nC_4 c^{n-4} s^4 - {}_nC_6 . c^{n-6} s^6 + \ldots) + i({}_nC_1 c^{n-1} s - {}_nC_3 c^{n-3} s^3 + {}_nC_5 c^{n-5} s^5 - \ldots)$$

$\therefore$ ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಊಹ್ಯ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಿಸುವುದರಿಂದ

$$\cos n\theta = c^n - {}_nC_2 c^{n-2} s^2 + {}_nC_4 c^{n-4} s^4 - \ldots$$

$$\sin n\theta = {}_nC_1 c^{n-1} s - {}_nC_3 c^{n-3} s^3 + {}_nC_5 c^{n-5} s^5 \ldots$$

(1) ಬಲಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಶ್ರೇಣಿಗಳು ಅನಂತವಲ್ಲ. n ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಅವು ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವುವು.

(2) $\cos n\theta$ ದ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ $\sin\theta$ ದ ಸಮಘಾತಗಳು ಮಾತ್ರ ಬಂದಿರುವುದರಿಂದ, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ ಈ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೇವಲ $\cos\theta$ ಮತ್ತು ಅದರ ವಿವಿಧ ಘಾತಗಳಿರುವಂತೆ ಪರಿವರ್ತಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.

(3) n ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ $\sin n\theta$ ದ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೇವಲ $\sin\theta$ ಮತ್ತು ಅದರ ವಿವಿಧ ಘಾತಗಳಿರುವಂತೆ ಪರಿವರ್ತಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.

(4) $$\tan n\theta = \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta} = \frac{{}_nC_1 t - {}_nC_3 t^3 + {}_nC_5 t^5 \ldots}{1 - {}_nC_2 t^2 + {}_nC_4 t^4 - \ldots} \quad (t = \tan\theta)$$

$\tan n\theta$ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಬೇರೆಯ ಒಂದು ಕ್ರಮದಿಂದಲೂ ಪಡೆಯಬಹುದು.

$$\text{cis}\,\theta_1 \,\text{cis}\,\theta_2 \ldots \text{cis}\,\theta_n = \text{cis}(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)$$

ಎಡಬದಿ $= \cos\theta_1 (1 + i\tan\theta_1)\cos\theta_2(1 + i\tan\theta_2) \ldots \times \cos\theta_n (1 + i\tan\theta_n)$

$$= (\cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_n)\left[1 + iS_1 + i^2 S_2 + i^3 S_3 + \ldots\right]$$

ಇಲ್ಲಿ $S_1 = \Sigma \tan\theta_1$, $S_2 = \Sigma \tan\theta_1 \tan\theta_2$ ಇತ್ಯಾದಿ.

$\therefore$ ಎಡಬದಿ $= (\cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_n)$

$$\left[(1 - S_2 + S_4 - S_6 + \ldots) + i(S_1 - S_3 + S_5 - \ldots)\right]$$

$=$ ಬಲಬದಿ, $\left[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)\right]$

ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಊಹ್ಯ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಿಸುವುದರಿಂದ,

$$\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) = (\cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_n) \times \left[1 - S_2 + S_4 - S_6 + \ldots.\right]$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) = (\cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_n) \times \left[S_1 - S_3 + S_5 \ldots\right]$$

$$\therefore \tan(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) = \frac{S_1 - S_3 + S_5 - S_7 + \ldots}{1 - S_2 + S_4 - S_6 + \ldots}$$

$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \ldots = \theta_n = \theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$\tan n\theta = \frac{{}_nC_1 t - {}_nC_3 t^3 + {}_nC_5 t^5 - \ldots}{1 - {}_nC_2 t^2 + {}_nC_4 t^4 - \ldots} \quad (t = \tan\theta)$$

ಉದಾಹರಣೆ

(1) $\sin 7\theta = {}_7C_1 \cos^6\theta \sin\theta - {}_7C_3 \cos^4\theta \sin^3\theta + {}_7C_5 \cos^2\theta \sin^5\theta - \sin^7\theta$

$$= 7\cos^6\theta \sin\theta - 35\cos^4\theta \sin^3\theta + 21\cos^2\theta \sin^5\theta - \sin^7\theta$$

(2) α, β, γ ಗಳು $x^3 + px^2 + qx + p = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾದರೆ $\tan^{-1}\alpha + \tan^{-1}\beta + \tan^{-1}\gamma$ ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\alpha + \beta + \gamma = -p, \ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q, \ \alpha\beta\gamma = -p$$

$$\tan(\tan^{-1}\alpha + \tan^{-1}\beta + \tan^{-1}\gamma) = \frac{S_1 - S_3}{1 - S_2}$$

$$= \frac{(\alpha + \beta + \gamma) - \alpha\beta\gamma}{1 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)} = \frac{-p + p}{1 - q} = 0, q \neq 1$$

$$\therefore \tan^{-1}\alpha + \tan^{-1}\beta + \tan^{-1}\gamma = n\pi, \ n \in I$$

(3) $\cos\frac{\pi}{7}$, $\cos\frac{3\pi}{7}$, $\cos\frac{5\pi}{7}$ ಮೂಲಗಳಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಇಂತಹ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಹೆಜ್ಜೆಗಳಲ್ಲಿ ಉತ್ತರಿಸುತ್ತೇವೆ.

I θ ವು $\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, \frac{7\pi}{7}, \ldots$

ಶ್ರೇಢಿಯ ಒಂದು ಕೋನವಾಗಿರಲಿ.

$\therefore 7\theta = (2k+1)\pi$ ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪ, $k \epsilon I$

II $4\theta = (2k+1)\pi - 3\theta$

cosine ಮೂಲಗಳು ಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$\cos 4\theta = \cos[(2k+1)\pi - 3\theta)]$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$\cos 4\theta = -\cos 3\theta$, ಇದನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಬೇಕು.

$8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1 + 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 0$

$\therefore 8c^4 + 4c^3 - 8c^2 - 3c + 1 = 0, \quad c = \cos\theta$

III ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $\cos\frac{\pi}{7}$, $\cos\frac{3\pi}{7}$, $\cos\frac{5\pi}{7}$, $\cos\frac{7\pi}{7}$, $\cos\frac{9\pi}{7}$, ...ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

ಇಲ್ಲಿ $\cos\frac{7\pi}{7} = -1$ ಮತ್ತು $\cos\frac{9\pi}{7} = \cos\frac{5\pi}{7}$,

$\cos\frac{11\pi}{7} = \cos\frac{3\pi}{7}$ ಎಂದು ಮುಂತಾಗಿ ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ.

$\therefore$ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $(c+1)$ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಹೊರ ತೆಗೆದರೆ ಉಳಿಯುವ ಮೂರನೆಯ ಘಾತದ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು

$\cos\frac{\pi}{7}$, $\cos\frac{3\pi}{7}$, $\cos\frac{5\pi}{7}$

IV ಆದ್ದರಿಂದ ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣವು

$8c^3 - 4c^2 - 4c + 1 = 0$

$$\therefore \cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\tfrac{1}{2}$$

$$\sec\frac{\pi}{7}+\sec\frac{3\pi}{7}+\sec\frac{5\pi}{7}=4$$

(4) $$\frac{1}{4-\sec^2\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{4-\sec^2\frac{4\pi}{7}}+\frac{1}{4-\sec^2\frac{6\pi}{7}}=1$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

I $\tan^2\frac{2\pi}{7}$, $\tan^2\frac{4\pi}{7}$, $\tan^2\frac{6\pi}{7}$ ಮೂಲಗಳಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು.

$\theta=\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}, \ldots$ ಬೆಲೆಯಾಗಿರಲಿ.

$\therefore 7\theta = 2k\pi, k\in I$

$\therefore \tan 7\theta = 0$

II $\therefore {}_7C_1\, t - {}_7C_3\, t^3 + {}_7C_5\, t^5 - {}_7C_7\, t^7 = 0, \quad t=\tan\theta$

$t(7-35t^2+21t^4-t^6)=0$

ಇಲ್ಲಿ $t=0$, $\theta=\frac{14\pi}{7}$ ಬೆಲೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದೆ

$\therefore t^6-21t^4+35t^2-7=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು

$\tan\frac{2\pi}{7}, \tan\frac{4\pi}{7}, \tan\frac{6\pi}{7}, \tan\frac{8\pi}{7}, \tan\frac{10\pi}{7}, \tan\frac{12\pi}{7}, \tan\frac{16\pi}{7}, \ldots$

ಈಗ, $\tan\frac{8\pi}{7}=-\tan\frac{6\pi}{7}$, $\tan\frac{10\pi}{7}=-\tan\frac{4\pi}{7}$,

$\tan\frac{12\pi}{7}=-\tan\frac{2\pi}{7}, \ldots\ldots$

$\therefore$ ಮೇಲಿನ 6 ನೆಯ ಘಾತದ ಸಮೀಕರಣದ ಆರು ಮೂಲಗಳು

$\pm\tan\frac{2\pi}{7}, \pm\tan\frac{4\pi}{7}, \pm\tan\frac{6\pi}{7}$

III $t^2 = x$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ ದೊರೆಯುವ ಮೂರನೆಯ ಘಾತದ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು

$\tan^2\dfrac{2\pi}{7}$, $\tan^2\dfrac{4\pi}{7}$, $\tan^2\dfrac{6\pi}{7}$.

$\therefore$ ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣ $x^3 - 21x^2 + 35x - 7 = 0$ ಆಗಿದೆ.

IV $$\frac{1}{4 - \sec^2\frac{2\pi}{7}} = \frac{1}{3 - \tan^2\frac{2\pi}{7}}$$

$\therefore \dfrac{1}{3 - x} = y$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, ದೊರೆಯುವ y–ಸಮೀಕರಣದ

ಮೂಲಗಳು $\dfrac{1}{4 - \sec^2\frac{2\pi}{7}}$, $\dfrac{1}{4 - \sec^2\frac{4\pi}{7}}$, $\dfrac{1}{4 - \sec^2\frac{6\pi}{7}}$

y–ಸಮೀಕರಣವು, $64y^3 - 64y^2 + 12y + 1 = 0$

ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ $= 1$

3.9 $\sin^n\theta$, $\cos^n\theta$, $\sin^m\theta\cos^n\theta$ ಗಳ ವಿಸ್ತರಣೆ (m, n ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು)—

$x = \cos\theta + i\sin\theta$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\therefore \dfrac{1}{x} = \cos\theta - i\sin\theta$

$x^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$

$\dfrac{1}{x^k} = \cos k\theta - i\sin k\theta$

$\therefore x + \dfrac{1}{x} = 2\cos\theta,\ x - \dfrac{1}{x} = 2i\sin\theta$

$x^k + \dfrac{1}{x^k} = 2\cos k\theta,\ x^k - \dfrac{1}{x^k} = 2i\sin k\theta$

I $(2i)^n \sin^n\theta = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^n = [x^n - {}_nC_1 x^{n-2} + {}_nC_2 x^{n-4} - \ldots$

$+ (-1)^n \dfrac{1}{x^n}]$

(*a*) n ಸಮಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಲಿ (>0)

$$(2i)^n \sin^n \theta = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) - {}_nC_1 \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) + \ldots$$

$$= 2\,[\cos n\theta - {}_nC_1 \cos (n-2)\,\theta + \ldots]$$

$$\therefore \sin^n \theta = \frac{1}{2^{n-1}(-1)^{n/2}}\,[\cos n\theta - {}_nC_1 \cos (n-2)\,\theta + {}_nC_2 \cos (n-4)\theta - \ldots]$$

(*b*) n ವಿಷಮ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಲಿ (> 0)

$$(2i)^n \sin^n \theta = \left(x^n - \frac{1}{x^n}\right) - {}_nC_1\left(x^{n-2} - \frac{1}{x^{n-2}}\right) + \ldots.$$

$$2^n\, i\, i^{n-1} \sin^n \theta = 2i\,[\sin n\theta - {}_nC_1 \sin (n-2)\,\theta + \ldots]$$

$$\therefore \sin^n \theta = \frac{1}{2^{n-1}(-1)^{n-1/2}}\,[\sin n\theta - {}_nC_1 \sin (n-2)\theta + {}_nC_2 \sin (n-4)\theta \ldots.]$$

II $$2^n \cos^n \theta = \left(x + \frac{1}{x}\right)^n = x^n + {}_nC_1\, x^{n-2} + {}_nC_2\, x^{n-4} + \ldots\ldots + \frac{1}{x^n}$$

$$= \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + {}_nC_1\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) + {}_nC_2\left(x^{n-4} + \frac{1}{x^{n-4}}\right) + \ldots.$$

$$= 2\,[\cos n\theta + {}_nC_1 \cos (n-2)\,\theta + \ldots]$$

$$\therefore \cos^n \theta = \frac{1}{2^{n-1}}\,[\cos n\theta + {}_nC_1 \cos (n-2)\,\theta + {}_nC_2 \cos (n-4)\theta + \ldots.]$$

III $$\sin^m \theta \cos^n \theta = \frac{1}{(2i)^m}\left(x - \frac{1}{x}\right)^m \frac{1}{2^n}\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$$

ಇಲ್ಲಿಂದ ಮುಂದೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಆವರಣವನ್ನೂ ವಿಸ್ತರಿಸಿ, ಇವೆರಡರ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಬರೆದು, ಪದಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾಗಿ ಅಳವಡಿಸಿದರೆ, $x^k - \frac{1}{x^k}$

ಅಥವಾ $x^k + \frac{1}{x^k}$ ಗಳಂತಹ ಪದಯುಗ್ಮಗಳು ದೊರೆಯುವುವು. ಇವುಗಳ ಬೆಲೆ ತಿಳಿದಿರುವುದರಿಂದ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಬಹುದು. m, n ಗಳ ಬೆಲೆ ಕಿರಿಯದಾಗಿರುವಾಗ ಈ ಕ್ರಮ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕವಾಗಿದೆ. ಅವು ದೊಡ್ಡದಾದರೆ ಈ ಕ್ರಮವು ಬಲು ತ್ರಾಸದಾಯಕವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ

$$\sin^3\theta\cos^5\theta = \frac{1}{(2i)^3}\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 \frac{1}{2^5}\left(x + \frac{1}{x}\right)^5$$

$$= -\frac{1}{2^8 i}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^3\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

$$= \frac{-1}{2^8 i}\left[\left(x^8 - \frac{1}{x^8}\right) + 2\left(x^6 - \frac{1}{x^6}\right) - 2\left(x^4 - \frac{1}{x^4}\right) - 6\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2^7}(\sin 8\theta + 2\sin 6\theta - 2\sin 4\theta - 6\sin 2\theta)$$

ಸೂಚನೆ: ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ವಿಸ್ತರಣೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ m, n ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.2

ಸಾಧಿಸಿರಿ.

1 $\left(\frac{1 + \sin\phi + i\cos\phi}{1 + \sin\phi - i\cos\phi}\right)^n = \cos\frac{n}{2}(\pi - 2\phi) + i\sin\frac{n}{2}(\pi - 2\phi)$

2 $[\cos\theta - \cos\phi + i(\sin\theta - \sin\phi)]^n + [\cos\theta - \cos\phi - i(\sin\theta - \sin\phi)]^n$

$$= 2^{n+1}\sin^n\frac{\phi - \theta}{2}\cos\frac{\pi + \theta + \phi}{2n}$$

3 $(\sin x + i\cos x)^n = \cos\frac{n}{2}(\pi - 2x) + i\sin\frac{n}{2}(\pi - 2x)$

4 $(a^2-b^2)(c^2-d^2) = (c^2 - b^2)(a^2 - d^2) + (a^2 - c^2)(b^2 - d^2)$ ಎಂಬ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $a = \text{cis}\,\alpha$ ಎಂದು ಮುಂತಾಗಿ ಆದೇಶಿಸಿ, $\sin(\alpha - \beta)\sin(\gamma - \delta) = \sin(\alpha - \delta)\sin(\gamma - \beta) + \sin(\alpha - \gamma)\sin(\beta - \delta)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

5 $2\cos\theta = x + \frac{1}{x}$, $2\cos\phi = y + \frac{1}{y}$, ...ಎಂದು ಮುಂತಾಗಿ ಇದ್ದರೆ,

$$2\cos(\theta+\phi+\psi+\ldots) = xyz\ldots + \frac{1}{xyz\ldots}$$ ಎಂದೂ

$$2i\sin(\theta+\phi+\psi+\ldots) = xyz\ldots - \frac{1}{xyz\ldots}$$ ಎಂದೂ

ಸಾಧಿಸಿರಿ.

6 $(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)(a_3+ib_3)\ldots(a_n+ib_n)$

$= A + iB$ ಎಂದಿದ್ದರೆ

$$A^2+B^2 = (a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)(a_3^2+b_3^2)\ldots(a_n^2+b_n^2)$$

ಎಂದೂ $\tan^{-1}\frac{B}{A} + n\pi = \tan^{-1}\frac{b_1}{a_1} + \tan^{-1}\frac{b_2}{a_2} + \ldots + \tan^{-1}\frac{bn}{an}$

ಎಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ. $(n \epsilon \mathrm{I})$

7 $(a+bi)^{m/n} + (a-bi)^{m/n} = 2(a^2+b^2)^{m/2n}$

$\cos\left(\frac{m}{n}\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

8 ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(*a*) $\sqrt{3}+i$ ನಾಲ್ಕು ನಾಲ್ಕನೆಯ ಮೂಲಗಳು

(*b*) $3-4i$ ಏಳು ಏಳನೆಯ ಮೂಲಗಳು.

(*c*) -1ರ ಹತ್ತು, ಹತ್ತನೆಯ ಮೂಲಗಳು.

9 $x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

10 $x^9-x^5+x^4-1=0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

11 $(a+bi)^{1/n}+(a-bi)^{1/n}$ ಈ ಉತ್ಪನ್ನದ n ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12 $a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta + 2ga\cos\theta + 2fb\sin\theta + c = 0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ನಾಲ್ಕು ಮೂಲಗಳಿವೆಯೆಂದೂ, ಈ ಮೂಲಗಳಿಂದ ದೊರೆಯುವ θ ದ ಬೆಲೆಗಳ ಮೊತ್ತ $2n\pi$ $(n\epsilon\mathrm{I})$ ಎಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ.

13 $\cos 9\theta = \cos^9\theta - 36\cos^7\theta\sin^2\theta + 126\cos^5\theta\sin^4\theta$

$-84\cos^3\theta\sin^6\theta + 9\cos\theta\sin^8\theta$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

14 $\cos 8\theta = \cos^8 \theta - 28 \cos^6 \theta \sin^2 \theta + 70 \cos^4 \theta \sin^4 \theta - 28 \cos^2 \theta \sin^6 \theta + \sin^8 \theta$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

15 $2^7 \cos^8 \theta = \cos 8\theta + 8 \cos 6\theta + 28 \cos 4\theta + 56 \cos 2\theta + 35$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

16 $256 \cos^9 \theta = \cos 9\theta + 9 \cos 7\theta + 36 \cos 5\theta + 84 \cos 3\theta + 126 \cos \theta$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

17 $2^5 \sin^4 \theta \cos^2 \theta = \cos 6\theta - 2 \cos 4\theta - \cos 2\theta + 2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

18 $-2^{10} \sin^3 \theta \cos^8 \theta = \sin 11\theta + 5 \sin 9\theta + 7 \sin 7\theta - 5 \sin 5\theta - 22 \sin 3\theta - 14 \sin \theta$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

19 $2 \cos \frac{2\pi}{5},\ 2 \cos \frac{4\pi}{5},\ 2 \cos \frac{6\pi}{5},\ 2 \cos \frac{8\pi}{5}$ ಮೂಲಗಳಿರುವ ಸಮೀಕರಣ

$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

$\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5}$ ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

20 $\sin \frac{2\pi}{7},\ \sin \frac{4\pi}{7},\ \sin \frac{8\pi}{7}$ ಮೂಲಗಳಿರುವ ಸಮೀಕರಣ

$x^3 - \frac{\sqrt{7}}{2} x^2 + \frac{\sqrt{7}}{8} = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

21 ಇವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ—

(a) $\cos^4 \frac{\pi}{9} + \cos^4 \frac{2\pi}{9} + \cos^4 \frac{3\pi}{9} + \cos^4 \frac{4\pi}{9} = \frac{19}{16}$

(b) $\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$

(c) $\cos \frac{\pi}{15} + \cos \frac{7\pi}{15} + \cos \frac{11\pi}{15} + \cos \frac{13\pi}{15} = -\frac{1}{2}$

ನಾಲ್ಕನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯ

ಹೈಪರ್ಬೋಲೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

4.1 ಹೈಪರ್ಬೋಲೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ—

$$\text{ಹೈಪರ್ಬೋಲೀಯ } \sin e\,\theta \equiv \sinh\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} \tag{4.1}$$

$$\text{ಹೈಪರ್ಬೋಲೀಯ } \cos ine\,\theta \equiv \cosh\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} \tag{4.2}$$

ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ, } \tanh\theta = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta} = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}} = \frac{e^{2\theta} - 1}{e^{2\theta} + 1}$$

$$\coth\theta = \frac{\cosh\theta}{\sinh\theta} = \frac{1}{\tanh\theta} = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{e^{\theta} - e^{-\theta}} = \frac{e^{2\theta} + 1}{e^{2\theta} - 1}$$

$$\operatorname{sech}\theta = \frac{1}{\cosh\theta} = \frac{2}{e^{\theta} + e^{-\theta}}$$

$$\operatorname{cosech}\theta = \frac{1}{\sinh\theta} = \frac{2}{e^{\theta} - e^{-\theta}}$$

ಇವುಗಳ ಮುಖ್ಯ ಗುಣಗಳು ಹೀಗಿವೆ—

$$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = \tfrac{1}{4}(e^{2\theta} + e^{-2\theta} + 2 - e^{2\theta} - e^{-2\theta} + 2)$$
$$= 1 \tag{4.3}$$

$$\therefore\ 1 - \tanh^2\theta = \operatorname{sech}^2\theta \tag{4.4}$$

$$\therefore\ \coth^2\theta - 1 = \operatorname{cosech}^2\theta \tag{4.5}$$

ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಬರುವ θ ವು ವಾಸ್ತವ ಅಥವಾ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಬಹುದು. $\theta = 0$ ಆದಾಗ $\sinh 0 = 0$, $\cosh 0 = 1$, $\tanh 0 = 0$, $\coth 0$, $\operatorname{cosech} 0$ ಅಪರ್ಯಾಪ್ತವಾಗುವುವು. $\operatorname{sech} 0 = 1$

4.2 ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಮತ್ತು ಹೈಪರ್ಬೋಲೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಸಂಬಂಧ—

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \infty$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots \infty$$

ಎಂದು ವಿಶ್ಲೇಷಣ ಗಣಿತದಿಂದ ತಿಳಿದು ಬರುತ್ತದೆ. θ ವು ಒಂದು ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವಾಗ $\sin \theta$ ಮತ್ತು $\cos \theta$ ಗಳನ್ನು ಈ ವಿಸ್ತರಣೆಗಳಿಂದಲೇ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ, θ ವು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವಾಗ

$$e^\theta = 1 + \frac{\theta}{1!} + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \ldots \infty$$

ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ನೀಡುತ್ತೇವೆ.

$$\therefore \cos \theta + i \sin \theta = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots \infty\right)$$

$$+ i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots \infty\right)$$

$$= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \ldots \infty$$

$$= e^{i\theta}$$

$$\therefore \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

$$\cos \theta - i \sin \theta = e^{-i\theta}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cosh i\theta$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{\sinh i\theta}{i}$$

ಅಥವಾ, $\cosh i\theta = \cos \theta$

$\sinh i\theta = i \sin \theta$

ಇವುಗಳನ್ನು ಆಯ್ಲರನ ಉಕ್ತಿಗಳೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.

θ ವನ್ನು $i\theta$ ವೆಂದು ಪರಿವರ್ತಿಸಿದರೆ,

$$\cos i\theta = \cosh(-\theta) = \frac{e^{-\theta} + e^{\theta}}{2} = \cosh \theta \tag{4.6}$$

$$i \sin i\theta = \sinh(-\theta) = \frac{e^{-\theta} - e^{\theta}}{2} = -\sinh \theta$$

$$\therefore \sin i\theta = i \sinh \theta \tag{4.7}$$

(4.6) ಮತ್ತು (4.7) ಸೂತ್ರಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತ್ರಿಕೋಣ ಮಿತೀಯ ಸೂತ್ರದ ಅನುರೂಪ ಹೈಪರ್ಬೋಲೀಯ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪಡೆಯ ಬಹುದು.

θ ವು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವಾಗ,

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\therefore \cos^2\theta + \sin^2\theta = \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2}{4} - \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^2}{4} = 1$$

ಇದೇ ರೀತಿ, $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$$\cot^2\theta + 1 = \operatorname{cosec}^2\theta$$

ಈಗ θ ವನ್ನು $i\theta$ ಎಂದು ಪರಿವರ್ತಿಸಿದರೆ,

$$\cos^2 i\theta + \sin^2 i\theta = 1$$

$$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$$

ಇದೇ ರೀತಿ $1 - \tanh^2\theta = 1$

$$\coth^2\theta - 1 = \operatorname{cosech}^2\theta$$

A ಮತ್ತು B ಗಳು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ.

$$\sin(A + B) = \frac{e^{(A+B)i} - e^{-(A+B)i}}{2i}$$

$$= \frac{1}{2i}\Big[(\cos A + i\sin A)(\cos B + i\sin B) - (\cos A - i\sin A)(\cos B - i\sin B)\Big]$$

$$= \frac{1}{2i}\Big[(\cos A\cos B - \sin A\sin B - \cos A\cos B + \sin A\sin B) + i(\sin B\cos A + \sin A\cos B + \sin B\cos A + \sin A\cos B)\Big]$$

$$= \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

ಹೀಗೆ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಸೂತ್ರಗಳೆಲ್ಲವೂ ಕೋನಗಳು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆ ಯಾದಾಗಲೂ ಸತ್ಯವಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ

(1) $\tan(\theta + i\phi)$ ನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಊಹ್ಯಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿರಿ.

$$\tan(\theta + i\phi) = \frac{\sin(\theta + i\phi)\cos(\theta - i\phi)}{\cos(\theta + i\phi)\cos(\theta - i\phi)}$$

$$= \frac{\sin 2\theta + i \sinh 2\phi}{\cos 2\theta + \cosh 2\phi}$$

$$\therefore \ \text{R} \ \tan(\theta + i\phi) = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta + \cosh 2\phi}$$

$$\text{I} \ \tan(\theta + i\phi) = \frac{\sinh 2\phi}{\cos 2\theta + \cosh 2\phi}$$

(2) $\tan(\text{A} + i\text{B}) = x + iy$ ಎಂದಿದ್ದರೆ,

$$x^2 + y^2 + 2x \cot 2\text{A} = 1, \quad x^2 + y^2 - 2y \coth 2\text{B} + 1 = 0$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

$$x + iy = \tan(\text{A} + i\text{B})$$

$$\therefore \ \text{A} + i\text{B} = \tan^{-1}(x + iy)$$

$$\therefore \ \text{A} - i\text{B} = \tan^{-1}(x - iy)$$

$$\therefore \ 2\text{A} = \tan^{-1}(x + iy) + \tan^{-1}(x - iy)$$

$$\therefore \ \cot 2\text{A} = \frac{1 - (x + iy)(x - iy)}{(x + iy) + (x - iy)}$$

$$2x \cot 2\text{A} = 1 - (x^2 + y^2)$$

$$\therefore \ x^2 + y^2 + 2x \cot 2\text{A} = 1$$

$$2i\text{B} = \tan^{-1}(x + iy) - \tan^{-1}(x - iy)$$

$$\therefore \ \frac{\coth 2\text{B}}{i} = \frac{1 + x^2 + y^2}{(x + iy) - (x - iy)} = \frac{1 + x^2 + y^2}{2iy}$$

$$\therefore \ x^2 + y^2 - 2y \coth 2\text{B} + 1 = 0$$

(3) $\text{Tan}^{-1}(e^{i\theta}) = n\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{i}{4} \log \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

$$\text{Tan}^{-1}(e^{i\theta}) = n\pi + \tan^{-1}(e^{i\theta})$$
$$= n\pi + \tan^{-1}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$\tan^{-1}(\cos\theta + i\sin\theta) = x + iy$ ಎಂದಿರಲಿ

$$\therefore \ \tan^{-1}(\cos\theta - i\sin\theta) = x - iy$$

$$\therefore \ \tan 2x = \frac{2\cos\theta}{1-1} = \frac{2\cos\theta}{0}$$

$$\therefore \ 2x = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \ x = \frac{\pi}{4}$$

ಪುನಃ $\tan(2yi) = \dfrac{2i\sin\theta}{2} = i\sin\theta$

$$\therefore \ \tanh 2y = \sin\theta$$

$$\therefore \ \sin\theta = \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{e^{2y} + e^{-2y}}$$

$$\therefore \ \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = \frac{e^{2y}}{e^{-2y}} = e^{4y}$$

$$\therefore \ -4y = \log\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right) = \log\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$y = -\frac{1}{4}\log\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\therefore \ \text{Tan}^{-1}(e^{i\theta}) = n\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{i}{4}\log\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

ಅಭ್ಯಾಸ 4.1

1 ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಊಹ್ಯಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿರಿ—

(*a*) $\tan(\alpha - i\beta)$

(*b*) $\cosh(x + iy)$

(*c*) $\sin(\alpha - i\beta)\cos(\alpha + i\beta)$

(*d*) $\text{cosech}(x - iy)$

2 ಸಾಧಿಸಿರಿ—

(*a*) $\tan\frac{u+iv}{2} = \frac{\sin u + i\sinh v}{\cos u + \cosh v}$

(*b*) $\tan^{-1}(\alpha + \beta i) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2\alpha}{1-\alpha^2-\beta^2}$

$$+ \frac{i}{4}\log\left[\frac{(1+\beta)^2+\alpha^2}{(1-\beta)^2+\alpha^2}\right]$$

(*c*) $\cos(\alpha + i\beta) + i\sin(\alpha + i\beta) = e^{-\beta}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

3 $\tan y = \tan\alpha\tanh\beta, \quad \tan z = \cot\alpha\tanh\beta$ ಎಂದಿದ್ದರೆ, $\tan(y+z) = \sinh 2\beta \operatorname{cosec} 2\alpha$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

4 $u = \log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$ ಎಂದಿದ್ದರೆ,

$\tanh\frac{u}{2} = \tan\frac{\theta}{2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

5 $\sin(A + iB) = x + iy$ ಎಂದಿದ್ದರೆ,
$\frac{x^2}{\cosh^2 B} + \frac{y^2}{\sinh^2 B} = 1$, ಮತ್ತು $\frac{x^2}{\sin^2 A} - \frac{y^2}{\sin^2 B} = 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

6 $\cos(\theta + i\phi) = R(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ಎಂದಿದ್ದರೆ,

$\phi = \frac{1}{2}\log\left[\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta+\alpha)}\right]$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

7 $A + iB = c\tan(x+iy)$ ಎಂದಿದ್ದರೆ,

$\tan 2x = \frac{2cA}{c^2 - A^2 - B^2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

8 ಸಾಧಿಸಿರಿ—

(*a*) $\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

(*b*) $\tanh(x-y) = \frac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}$

9 $\cos(x+iy) = \cos\theta + i\sin\theta$ ಎಂದಿದ್ದರೆ,
$\cos 2x + \cosh 2y = 2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

10 $\sin(x+iy) = \tan(\alpha + i\beta)$ ಎಂದಿದ್ದರೆ,

$\tan x \sin 2\beta = \tanh y \sin 2\alpha$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

4.3 ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯ ಪ್ರತಿಘಾತ (ಲಾಗರಿತಂ)—

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \infty \quad x \epsilon R$$

ಎಂದು ಗೊತ್ತಿದೆ. ಇದೇ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು x ಒಂದು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ e^x ನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ.

u ಮತ್ತು z ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು $e^u = z$ ಎಂದಿದ್ದರೆ, u ವನ್ನು z ನ ಪ್ರತಿಘಾತ (ಲಾಗರಿತಂ) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ಎಂದಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ $-\pi < \theta \leqslant \pi$

$u = \alpha + i\beta$ ಎಂದಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ $x, y, \alpha, \beta \epsilon R$.

$\therefore\ e^{\alpha + i\beta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\therefore\ e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\therefore\ e^{\alpha} = r,\ \ \beta = \theta + 2n\pi,\ \ n\epsilon I$

$r > 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $\alpha = \log_e r$, ಇದೊಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಮತ್ತು $\beta = 2n\pi + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$\therefore$ ಮೇಲಿನ ವಿವರಣೆಯ ಪ್ರಕಾರ

$$u = \text{ಪ್ರತಿಘಾತ}\, z = \alpha + i\beta = \log_e r + i\left[2n\pi + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

ಎಂದಾಗುವುದು. $(n\epsilon R)$ $= \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) + i\left[2n\pi + \tan^{-1}\frac{y}{x}\right]$

ಹೀಗೆ "ಪ್ರತಿಘಾತ z"ಗೆ n ಬದಲಾದಂತೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಬೆಲೆಗಳು ದೊರೆಯುವುವು. ಈ ಅರ್ಥವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಿಸಲು "ಪ್ರತಿಘಾತ z"ನ್ನು "Log z" ಎಂದು ಇಂಗ್ಲಿಷಿನ ದೊಡ್ಡ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

$\therefore\ \text{Log}_e z = \log_e r + 2n\pi i + i\theta$, ಅಥವಾ

$$\text{Log}_e z = \frac{1}{2}\log_e(x^2 + y^2) + 2n\pi i + i\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

ಇಲ್ಲಿ $z = x + iy, n \epsilon R$ ಮತ್ತು θ ವು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆ z ನ ಪ್ರಧಾನ ಕೋನಾಂಕವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ

$$\text{Log}(1 + i) = \tfrac{1}{2}\log_e 2 + 2n\pi i + i\tan^{-1}(1)$$

$$= \tfrac{1}{2}\log_e 2 + 2n\pi i + \frac{i\pi}{4}$$

$$\text{Log}(\sqrt{3} + i) = \log_e 2 + 2n\pi i + i\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \log_e 2 + 2n\pi i + \frac{i\pi}{6}$$

$$\text{Log}_e z = \text{Log}_e (x + iy) = \tfrac{1}{2}\log(x^2 + y^2) + 2n\pi i + i\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

ಇಲ್ಲಿ $y = 0$ ಆದಾಗ

$\text{Log}_e z = \text{Log}_e x = \log x + 2n\pi i$. ಈ ವಿಶೇಷ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೂ, $n=0$ ಆದರೆ, $\text{Log}_e z = \text{Log}_e x = \log_e x$. ಹೀಗೆ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ $x (> 0)$ ನ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರತಿಘಾತ ಈ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರತಿಘಾತದ ಒಂದು ವಿಶೇಷ ರೂಪವಾಗಿ ಲಭಿಸುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ

(1) $\text{Log}_e \sin(x + iy)$ ಯನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಊಹ್ಯಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ.

$$\text{Log}_e \sin(x + iy) = \text{Log}(\sin x \cosh y + i\cos x \sinh y)$$

$$= \tfrac{1}{2}\log(\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y) + 2n\pi i$$

$$+ i\tan^{-1}(\cot x \tanh y),$$

ಇಲ್ಲಿ $-\pi < \tan^{-1}(\cot x \tanh y) \leq \pi, \quad n \epsilon I$

$$\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y = (1 - \cos^2 x)\cosh^2 y$$

$$+ \cos^2 x(\cosh^2 y - 1) = \cosh^2 y - \cos^2 x$$

$$\therefore \text{Log}_e \sin(x + iy) = \tfrac{1}{2}\log(\cosh^2 y - \cos^2 x) + 2n\pi i$$

$$+ i\tan^{-1}(\cot x \tanh y)$$

(2) $\mathrm{Log}_e(-4)$ ರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$e^{x+iy} = -4$ ಎಂದಿರಲಿ.

$$e^{x+iy} = -4 = 4\left[\cos(2n+1)\pi + i\sin(2n+1)\pi\right]$$
$$= 4\,e^{(2n+1)\pi i}$$

$$\therefore\ \mathrm{Log}_e(-4) = \log_e 4 + (2n+1)\pi i$$

(3) $\log\dfrac{a+ib}{a-ib} = 2i\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

$$\log\frac{a+ib}{a-ib} = \log(a+ib) - \log(a-ib)$$

$$= \left[\frac{1}{2}\log(a^2+b^2) + i\tan^{-1}\frac{b}{a}\right]$$

$$-\left[\frac{1}{2}\log(a^2+b^2) + i\tan^{-1}\frac{b}{a}\right]$$

$$= +2i\tan^{-1}\frac{b}{a}$$

$$\therefore\ \log\left(\frac{a+ib}{a-ib}\right) = 2i\tan^{-1}\frac{b}{a}$$

4.4 a ಮತ್ತು x ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವಾಗ a^x ಉತ್ಪನ್ನದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ—

a ಮತ್ತು x ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವಾಗ

$a^x = e^{x\log_e a}$ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. a ಮತ್ತು x ಗಳು ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವಾಗ ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಾವು $a^x = e^{x\,\mathrm{Log}_e a}$ ಎಂದು ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತೇವೆ. $R \subset C$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯು a ಮತ್ತು x ಗಳ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ (ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಮಿಶ್ರ) ಅನ್ವಯಿಸುವುದು. a ಯು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ $\mathrm{Log}_e a$ಗೆ ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಬೆಲೆಗಳಿವೆ.

$$\therefore\ a^x = e^{x\,\mathrm{Log}_e a} = e^{x(2n\pi i + \log_e a)}, \quad n \in I$$

$n = 0$ ಆದಾಗ a^x ಗೆ ದೊರೆಯುವ ಬೆಲೆಯನ್ನು, ಅಂದರೆ $e^{x\log_e a}$ ಯನ್ನು a^x ನ ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆಯೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$\therefore a^x$ ನ ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆ $= e^{x \log_e a} = 1 + x \log_e a$

$$+ \frac{x^2}{2!} (\log_e a)^2 + \frac{x^3}{3!} (\log_e a)^3 + \ldots . \infty$$

ಉದಾಹರಣೆ

(1) $(a + ib)^{x+iy}$ ಯನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಊಹ್ಯಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ.

$a + i b = r (\cos \theta + i \sin \theta)$ ಎಂದಿರಲಿ.

$$\therefore r = \sqrt{a^2 + b^2}, \ \theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

$$\therefore (a + ib)^{x+iy} = e^{(x+iy) \, \mathrm{Log}_e (a+ib)}$$

$$= e^{(x+iy). \log [(a+ib) + 2n\pi i]}$$

$$= e^{(x+iy) \log [r + (\theta+2n\pi) i]}, \qquad n \in \mathrm{I}$$

$$= e^{[x \log r - y (\theta+2n\pi)] + i [y \log r + x (\theta+2n\pi)]}$$

$$= e^{x \log r} . \ e^{-y(\theta+2n\pi)} . \ e^{i [y \log r + x (\theta+2n\pi)]}$$

$$= r^x . e^{-y (\theta+2n\pi)} [\cos \{y \log r + x (\theta + 2n\pi)\}$$

$$+ i \sin \{y \log r + x (\theta + 2n\pi)\}]$$

$(a + ib)^{x+iy}$ ಯ ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆ ($n = 0$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಬೇಕು)

$$= r^x e^{-y\theta} [\cos (y \log r + x \theta) + i \sin (y \log r + x\theta)]$$

(2) i^i ಇದರ ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆ $e^{-\pi/2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

$$i^i = e^{i \, \mathrm{Log} \, i} = e^{i \, \mathrm{Log} \, e^{(2n\pi + \pi/2) i}} \qquad n \in \mathrm{I}$$

$$= e^{-(2n\pi+\pi/2)}$$

$\therefore i^i$ ಯ ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆ $= e^{-\pi/2}$

(3) $a^{\alpha+i\beta} = (x + iy)^{p+iq}$ ಎಂದಿರುವಾಗ, ಕೇವಲ ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ,

$\alpha = \frac{p}{2} \log_a (x^2 + y^2) - q \tan^{-1} \frac{y}{x} \log_a e$ ಮತ್ತು

$$\log_a (x^2 + y^2) = \frac{2(\alpha p + \beta q)}{p^2 + q^2}$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದರಿಂದ,

$$(\alpha + i\beta) \log_a a = (p + qi) \log_a (x + iy)$$

$$\therefore \alpha + i\beta = (p + qi) \log_e (x + iy) \log_a e$$

$$= (p + qi) \log_a e \left[\log_e \sqrt{x^2 + y^2} + i \tan^{-1} \frac{y}{x}\right]$$

$$\therefore \alpha = p \log_a e \log_e \sqrt{x^2 + y^2} - q \log_a e \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$= \frac{p}{2} \log_a (x^2 + y^2) - q \log_a e \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$\beta = \frac{q}{2} \log_a (x^2 + y^2) + p \tan^{-1} \frac{y}{x} \log_a e$$

$$\therefore p\alpha + q\beta = \left(\frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}\right) \log_a (x^2 + y^2)$$

$$\therefore \log_a (x^2 + y^2) = \frac{2(\alpha p + \beta q)}{p^2 + q^2}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 4.2

1 $\log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{xi}{2}\right) = i \tan^{-1} \sinh x$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

2 $\log (-1) = \pi i$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

3 $\log \cos (x + iy) = \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{\cosh 2y + \cos 2x}{2}\right) - i \tan^{-1} (\tan x \tanh y)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

4 $i \log \frac{x - i}{x + i} = \pi - 2 \tan^{-1} x$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

5 $\mathrm{Log} (1 + i) = \frac{1}{2} \log_e 2 + i\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

6 $\log(1+\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = \log_e(2\cos\theta) + i\theta,$
$-\pi < \theta \neq \pi$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

7 $\log(1+i\tan\alpha) = \log_e \sec\alpha + \alpha i$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

$$\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

8 $\log\left(\frac{1}{1-e^{i\theta}}\right) = \log_e\left(\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{\theta}{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)$

9 $a^i = e^{-2n\pi}[\cos(\log a) + i\sin\log a]$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

10 $i^a = \cos\left[(2m+\tfrac{1}{2})\pi a\right] + i\sin\left[(2m+\tfrac{1}{2})\pi a\right]$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

11 $i^{i^i} = e^{i\theta}$ ಎಂದಿದ್ದರೆ,
$\theta = (2m+\tfrac{1}{2})\pi \,.\, e^{-(2n\pi+\pi/2)}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

12 $(a+ib)^p = m^{x+iy}$ ಎಂದಿದ್ದರೆ $\frac{y}{x}$ ನ ಒಂದು ಬೆಲೆ

$$\frac{2\tan^{-1}\frac{b}{a}}{\log_e(a^2+b^2)}$$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

13 $i^{\log(1+i)}$ ಇದರ ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆಯ ವಾಸ್ತವ ಭಾಗವು
$e^{-\pi^2/8}.\cos\left(\frac{\pi}{4}\log 2\right)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

14 $(1+i\tan a)^{-i}$ ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬೆಲೆಯು
$e^{a+2m\pi}[\cos(\log\cos a) + i\sin(\log\cos a)]$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

15 $\operatorname{Log}_i i = \frac{4n+1}{4m+1}$, $m, n \in \mathrm{I}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಐದನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯ

ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಮೊತ್ತ

5.1 ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ವಿಭಾಗ—ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಸ್ಥೂಲವಾಗಿ ಮೂರು ವಿಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

(1) ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯ (geometric series) ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುವಂತಹ ಶ್ರೇಣಿಗಳು.

(2) ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯದ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುವಂತಹ ಶ್ರೇಣಿಗಳು.

(3) ಘಾತೀಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುವಂತಹ ಶ್ರೇಣಿಗಳು; ಪ್ರತಿಘಾತೀಯ ಶ್ರೇಣಿಗಳು, ಇತ್ಯಾದಿ.

I $\sin\alpha + c\sin(\alpha+\beta) + c^2\sin(\alpha+2\beta) + \ldots\infty \quad |c|<1$

ಇದರ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$S = \sin\alpha + c\sin(\alpha+\beta) + c^2\sin(\alpha+2\beta) + \ldots\infty$$

ಎಂದಿರಲಿ

$$C = \cos\alpha + c\cos(\alpha+\beta) + c^2\cos(\alpha+2\beta) + \ldots\infty$$

ಎಂದಿರಲಿ.

$$C + iS = e^{i\alpha} + ce^{i(\alpha+\beta)} + c^2e^{(\alpha+2\beta)i} + \ldots\infty$$

$$= e^{i\alpha}[1 + ce^{i\beta} + (ce^{i\beta})^2 + (ce^{i\beta})^3 + \ldots\infty]$$

$$|ce^{i\beta}| = |c(\cos\beta + i\sin\beta)| = |c| < 1$$

ಎಂದಿರುವಾಗ $C + iS$ ಗೆ ಒಂದು ಮೊತ್ತವಿದೆ.

$$C + iS = e^{i\alpha}\times\frac{1}{1-ce^{i\beta}}$$

$$= \frac{e^{i\alpha}(1 - c\cos\beta + ci\sin\beta)}{(1 - c\cos\beta - ci\sin\beta)(1 - c\cos\beta + ci\sin\beta)}$$

$$= \frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)(1 - c\cos\beta + ci\sin\beta)}{1 + c^2 - 2c\cos\beta}$$

$$\therefore\ S = \frac{c \sin\beta \cos\alpha + \sin\alpha(1 - c\cos\beta)}{1 + c^2 - 2c\cos\beta}$$

$$= \frac{c\sin(\beta - \alpha) + \sin\alpha}{1 + c^2 - 2c\cos\beta}$$

II $\quad 1 + \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1.3}{2.4}\cos 2\alpha + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cos 3\alpha + \ldots$

ಇದರ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$C = 1 + \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1.3}{2.4}\cos 2\alpha + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cos 3\alpha + \ldots\infty$$

ಎಂದಿರಲಿ.

$$S = \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{1.3}{2.4}\sin 2\alpha + \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin 3\alpha + \ldots\infty$$

ಎಂದಿರಲಿ.

$$\therefore\ C + iS = 1 + \frac{1}{1}\left(\frac{e^{i\alpha}}{2}\right) + \frac{1.3}{2!}\left(\frac{e^{i\alpha}}{2}\right)^2 + \frac{1.3.5}{3!}\left(\frac{e^{i\alpha}}{2}\right)^3$$

$$+ \ldots\infty$$

$= (1 - e^{\alpha i})^{-\frac{1}{2}}, \quad (\alpha \neq 2n\pi)$ ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ.

$$\therefore\ C + iS = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos\alpha - i\sin\alpha}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\sin\frac{\alpha}{2}}\ \sqrt{\sin\frac{\alpha}{2} - i\cos\frac{\alpha}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\sin\frac{\alpha}{2}}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)\right]$$

$$\therefore\ C = \frac{\cos\frac{\pi - \alpha}{4}}{\sqrt{2\sin\frac{\alpha}{2}}}$$

III $\frac{c^2 \sin 2\theta}{2!} + \frac{c^4 \sin 4\theta}{4!} + \frac{c^6 \sin 6\theta}{6!} + \dots \infty$ ಇದರ ಮೊತ್ತ ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$S = \frac{c^2 \sin 2\theta}{2!} + \frac{c^4 \sin 4\theta}{4!} + \frac{c^6 \sin 6\theta}{6!} + \dots \infty \text{ ಎಂದಿರಲಿ.}$$

$$C = \frac{c^2 \cos 2\theta}{2!} + \frac{c^4 \cos 4\theta}{4!} + \frac{c^6 \cos 6\theta}{6!} + \dots \infty \text{ ಎಂದಿರಲಿ.}$$

$$C + iS = \frac{c^2}{2!} e^{2i\theta} + \frac{c^4}{4!} e^{4i\theta} + \frac{c^6}{6!} e^{6i\theta} + \dots \infty$$

$$= \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \infty, \quad x = ce^{i\theta}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \infty$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \infty$$

$$\therefore \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\therefore C + iS = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 = \frac{e^{ce^{i\theta}} + e^{-ce^{i\theta}}}{2} - 1$$

$$= \frac{e^{c(\cos\theta + i\sin\theta)} + e^{-c(\cos\theta + i\sin\theta)}}{2} - 1$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[e^{c\cos\theta}\{\cos(c\sin\theta) + i\sin(c\sin\theta)\}\right.$$

$$\left. + e^{-c\cos\theta}\{\cos(c\sin\theta) - i\sin(c\sin\theta)\}\right] - 1$$

$$\therefore S = \frac{e^{c\cos\theta} \cdot \sin(c\sin\theta) - e^{-c\cos\theta}\sin(c\sin\theta)}{2}$$

$$= \sin(c\sin\theta)\sinh(c\cos\theta)$$

IV $c \sin a + \frac{c^2}{2} \sin 2a + \frac{c^3}{3} \sin 3a + \dots \infty$ ಇದರ ಮೊತ್ತ ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. $|c| < 1$

$$S = c \sin \alpha + \frac{c^2}{2} \sin 2\alpha + \frac{c^3}{3} \sin 3\alpha + \dots \infty$$ ಎಂದಿರಲಿ.

$$C = c \cos \alpha + \frac{c^2}{2} \cos 2\alpha + \frac{c^3}{3} \cos 3\alpha + \dots \infty$$ ಎಂದಿರಲಿ.

$$C + iS = ce^{i\alpha} + \frac{c^2}{2} e^{2i\alpha} + \frac{c^3}{3} e^{3i\alpha} + \dots \infty$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \infty, \quad x = ce^{i\alpha}$$

$$= -\log(1 - x) = -\log(1 - ce^{i\alpha})$$

$$= -\log(1 - c\cos\alpha - ci\sin\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} 1 - c\cos\alpha &= r\cos\theta \\ -c\sin\alpha &= r\sin\theta \end{aligned}\right\}$$ ಎಂದಿರಲಿ.

$$r^2 = 1 + c^2 - 2c\cos\alpha$$

$$\tan\theta = \frac{-c\sin\alpha}{1 - c\cos\alpha}$$

$$\therefore\ C + iS = -\log(r\,e^{i\theta}) = -\log r - i\theta$$

$$\therefore\ S = -\theta = \tan^{-1}\left(\frac{c\sin\alpha}{1 - c\cos\alpha}\right)$$

ಮತ್ತು $C = -\log r = -\frac{1}{2}\log(1 + c^2 - 2c\cos\alpha)$

V $\sin\alpha + \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta) + \dots$ n ಪದಗಳವರೆಗೆ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$2\sin\frac{\beta}{2}\sin\alpha = \cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)$$

$$2\sin\frac{\beta}{2}\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)$$

$$2\sin\frac{\beta}{2}\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha+\frac{5\beta}{2}\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$2\sin\frac{\beta}{2}\sin(\alpha+\overline{n-2}\beta) = \cos\left(\alpha+\frac{2n-3}{2}\beta\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta\right)$$

ಕೂಡಿಸಿದರೆ

$$2\sin\frac{\beta}{2}\left[\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\ldots+\sin(\alpha+\overline{n-1}\beta)\right]$$

$$=\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta\right)$$

$$=2\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\frac{n\beta}{2}$$

$$\therefore \sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\ldots+\sin(\alpha+\overline{n-1}\beta)$$

$$=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

ಇದೇ ರೀತಿ

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\ldots+\cos(\alpha+\overline{n-1}\beta)$$

$$=\frac{\cos\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

$\beta = \alpha$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$ ಎಂದು ದೊರೆಯುವುವು.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.1

ಈ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ—

1 $1 - \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1.3}{2.4}\cos 2\theta - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cos 3\theta + \ldots \infty$

$-\pi < \theta < \pi$

2 $\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 3\alpha + \frac{1.3}{2.4}\sin 5\alpha + \ldots \infty$

3 $n\sin\alpha + \frac{n(n+1)}{1.2}\sin 2\alpha + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\sin 3\alpha$

$+ \ldots \infty$

4 $1 + \frac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{2.4}\cos 4\theta + \frac{1.3}{2.4.6}\cos 6\theta - \ldots \infty$

5 $\cos\alpha + c\cos(\alpha+\beta) + \frac{c^2}{2!}\cos(\alpha+2\beta) + \ldots \infty$

6 $\sin\alpha - \frac{\sin(\alpha+2\beta)}{2!} + \frac{\sin(\alpha+4\beta)}{4!} + \ldots \infty$

7 $\cos\alpha - \frac{\cos(\alpha+2\beta)}{3!} + \frac{\cos(\alpha+4\beta)}{5!} - \ldots \infty$

8 $1 + e^{\cos\alpha}\cos(\sin\alpha) + \frac{1}{2!}e^{2\cos\alpha}\cos(2\sin\alpha) + \ldots \infty$

9 $\sin\theta - \dfrac{\sin 3\theta}{3!} + \dfrac{\sin 5\theta}{5!} - \dots \infty$

10 $\sin\theta + \dfrac{\sin 2\theta}{2!} + \dfrac{\sin 3\theta}{3!} + \dots \infty$

11 $1 - \cos\theta + \dfrac{\cos 2\theta}{2!} - \dfrac{\cos 3\theta}{3!} + \dots \infty$

12 $1 + \cos\theta + \dfrac{\cos 2\theta}{2!} + \dfrac{\cos 3\theta}{3!} + \dots \infty$

13 $\cos\theta + \dfrac{1}{2}\cos 2\theta + \dfrac{1}{4}\cos 3\theta + \dfrac{1}{8}\cos 4\theta + \dots \infty$

14 $\sin\alpha \sin\theta + \sin^2\alpha \sin 2\theta + \sin^3\alpha \sin 3\theta + \dots$ n ಪದಗಳವರೆಗೆ

15 $\sin\dfrac{\pi}{15} + \sin\dfrac{5\pi}{15} + \sin\dfrac{9\pi}{15} + \dots + \sin\dfrac{33\pi}{15} = \sin\dfrac{\pi}{5}$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

16 $\cos\dfrac{\pi}{23} + \cos\dfrac{3\pi}{23} + \cos\dfrac{5\pi}{23} + \dots + \cos\dfrac{21\pi}{23} = \dfrac{1}{2}$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

17 $\sin\alpha + \sin\left(\alpha + \dfrac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\alpha + \dfrac{4\pi}{n}\right) + \dots n$ ಪದಗಳವರೆಗೆ.

18 $\alpha = \dfrac{2\pi}{n}$ ಆಗಿದ್ದರೆ

$$1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos(n-1)\alpha = 0$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

19 $\tan(2^{n-1}\alpha) = \cot(2^{n-1}\alpha) - 2\cot(2^n\alpha)$ ಎನ್ನುವ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ $\tan\alpha + 2\tan 2\alpha + 2^2\tan 2^2\alpha + \dots + 2^{n-1}\tan 2^{n-1}\alpha = \cot\alpha - 2^n\cot 2^n\alpha$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಉತ್ತರಗಳು

ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ

ಅಭ್ಯಾಸ 1.1

(ಪುಟ 13–14)

2 ಪರಸ್ಪರ ಸಮಭಾಗಿಸುವುವು. **3** $(-2, 1)$. **4** $\sqrt{120250}$, $(-167.5, 30.5)$.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.1

(ಪುಟ 28–29)

1 (*a*) $23x + 23y + 48 = 0$, (*b*) $115x + 46y + 189 = 0$, (*c*) $17x + 38y + 51 = 0$, (*d*) $109x - 100y + 73 = 0$, (*e*) $m_1 = -\tan 75°$, $m_2 = -\tan 15°$ (*f*) $6x + 31y + 31 = 0$.

4 $x + 2 = 0$ ಮತ್ತು $7x + 24y + 182 = 0$. **10** $\frac{2}{7}$.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.1

(ಪುಟ 39–42)

1 $(3, 2)$, $\pm \tan^{-1} 3$. **2** (*a*) $b = -10$, (*b*) $c = 2$, (*c*) 6. **16** $41x^2 + 166xy + 162y^2 = 0$.

17 $\pm \tan^{-1}\left[\frac{2ab\sqrt{a^2l^2 + b^2m^2 - 1}}{c^2 + b^2 - a^2b^2(l^2 + m^2)}\right]$, $a^2 + b^2 = a^2b^2(l^2 + m^2)$.

ಅಭ್ಯಾಸ 4.1

(ಪುಟ 55–58)

1 (*a*) $(0, 0)$, (*b*) $(2, -1)$, (*c*) ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮಿಾಕರಣ $5x - 12y - 45 = 0$ ಎಂದಿರಬೇಕು. ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದು $(-3, -5)$.

2 $11(x^2 + y^2) + 17x + 3y - 338 = 0$.

3 $7(x^2 + y^2) - 29x + 34y - 1 = 0$.

5 $3(x^2 + y^2) - 24x - 31y + 9 = 0$. **10** 14.

ಅಭ್ಯಾಸ 4.2

(ಪುಟ 74–77)

1 $x^2+y^2-x+3y+3+\lambda(x^2+y^2+8x-6y-3)=0$; $\lambda=\frac{1}{2}, -\frac{1}{28}$; $L(-1, 0)$, $L'\left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)$.

2 $x^2+y^2-6x-4y-44=0$. **3** $x^2+y^2-5x-14y-34=0$.

4 $x^2+y^2-6x-8y-43=0$. **5** $\left(\frac{27}{25}, \frac{36}{25}\right)$. **14** $(-2,-1)$.

17 $mx^2-lxy+ny-mc=0$. **22** $7(x^2+y^2)-122x-172y-469=0$.

23 $(18, -5)$ ಮತ್ತು $(\frac{3}{2}, -2)$ ಸಾದೃಶ್ಯ ಕೇಂದ್ರಗಳು. ಇವುಗಳಿಂದ ಯಾವುದೇ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ($SS_{11}=S_1^2$) ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುವು.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.1

(ಪುಟ 90)

(*a*) ಊಹ್ಯದೀರ್ಘವೃತ್ತ. ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ 24 ನ್ನು -24 ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ದೀರ್ಘವೃತ್ತ ದೊರೆಯುವುದು. ಅಕ್ಷಗಳು. $4\sqrt{3}$, $4\sqrt{2}$, $e=\frac{1}{\sqrt{3}}$ (*b*) ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ. ಅಕ್ಷಗಳು $\sqrt{\frac{10}{5}}$, $\sqrt{\frac{10}{5}}$, $e=\sqrt{2}$

(*c*) ಒಂದು ಜೊತೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳು (*d*) ಒಂದು ಜೊತೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳು

(*e*) ದೀರ್ಘವೃತ್ತ. ಅಕ್ಷಗಳು 2, $2\sqrt{2}$, $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$

ಅಭ್ಯಾಸ 6.1

(ಪುಟ 102–106)

19 $y^2(2a-h)=4a^2x$. **20** $y^2-2ax-4a^2=0$.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.1

(ಪುಟ 120–124)

3 $\frac{1}{2}$. **28** $t_3(l_1-l_2)=m_3(m_2-m_1)=l_3m_3(l_1m_2-l_2m_1)$.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.2

(ಪುಟ 134–139)

10 $b^4x^2 + a^4y^2 = a^2b^2(a^2 + b^2)$.

26 (*a*) $a^2y^2(e^2 + 1)^2 = b^2(x + ae)(ae^3 - x)$,

(*b*) $2(a^2x^2 + b^2y^2)^3 = a^4e^4(a^2x^2 - b^2y^2)^2$.

27 $\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\right)^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = 1$.

29 O ಬಿಂದು (x_1, y_1) ಎಂದಿರಲಿ. (*a*) $2S_1 = S_{11}$,

(*b*) $4\left[S - 2S_1 + S_{11} + 4 - \frac{x^2{y_1}^2}{a^2b^2} - \frac{y^2{x_1}^2}{a^2b^2} + \frac{2x_1y_1xy}{a^2b^2}\right] = {S_{11}}^2$,

(*c*) $S - 2S_1 = 0$.

ಅಭ್ಯಾಸ 8.1

(ಪುಟ 150–153)

3 $(6, -2)$. **4** ಊಹ್ಯ, 144 ನ್ನು -144 ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು $5x - 4y \pm 16 = 0$.

ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ

ಅಭ್ಯಾಸ 1.1

(ಪುಟ 166)

1 $2n\pi + \frac{2\pi}{3}$. **2** $(2n + 1)\frac{\pi}{2}$.

3 $n\pi - \frac{\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{2}$.

4 $n\pi + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{2}$; $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$.

5 $\frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{9}$. **6** $n\pi - \frac{\pi}{4}$, $n\pi$ **7** $n\pi + \frac{\pi}{6}$.

8 $2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$; $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$.

9 $k\pi$; $\frac{k\pi}{(2n-1)+(-1)^{n+1}}$.

10 $n\pi + (-1)^n\alpha$; $n\pi + (-1)^n\beta$

$\sin\alpha = \frac{-1+\sqrt{17}}{8}$, $\sin\beta = \frac{-1-\sqrt{17}}{8}$.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.1

(ಪುಟ 173–174)

11 $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$. **12** $0, \pm 2$.

13 $\pm\sqrt{2}$. **14** $3, -2\pm\sqrt{3}$.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.1

(ಪುಟ 185–186)

1 (*d*) ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾದಾಗ. **2** (*a*) $(-7, 24)$; (*b*) $(140, -74)$; (*c*) $(13, 19)$; (*d*) $\left(\frac{1}{29}, \frac{41}{29}\right)$ (*e*) $\left(\frac{881}{225}, \frac{-56}{225}\right)$ (*f*) $(-\frac{2}{5}, 0)$.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.2

ಪುಟ (199–201)

8 (*a*) $2^{\frac{1}{4}} \operatorname{cis} \frac{(12k+1)\pi}{24}$, $k=0, 1, 2, 3$; (*b*) $5^{1/7} \operatorname{cis} \frac{2k\pi+\alpha}{7}$, $k=0, 1, \ldots, 6$ $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ (*c*) $\operatorname{cis} \frac{2k+1}{10}\pi$, $k=0, 1, \ldots, 9$. **9** $-1, \pm i, \frac{1\pm i}{\sqrt{2}}, \frac{-1\pm i}{\sqrt{2}}$. **10** $\pm 1, \pm i$.

$\text{cis}\,\dfrac{2k+1}{5}\pi$, $k=0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 4.$ **11** $2r^{1/n}\cos\dfrac{2k\pi+\alpha}{n}$,

$k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$ $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$. **19** -1.

ಅಭ್ಯಾಸ 4.1

(ಪುಟ 206–208)

1 (*a*) $R\tan(\alpha-i\beta)=\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sinh^2\beta}$

$I\tan(\alpha-i\beta)=\dfrac{\sinh\beta\cosh\beta}{\cos^2\alpha+\sinh^2\beta}$

(*b*) $R\cosh(x+iy)=\cosh x\cos y$

$I\cosh(x+iy)=\sinh x\sin y$

(*c*) $R\sin(\alpha-i\beta)\cos(\alpha+i\beta)=\sin\alpha\cos\alpha$

$I\sin(\alpha-i\beta)\cos(\alpha+i\beta)=\sinh\beta\cosh\beta$

(*d*) $R\,\text{cosech}\,(x-iy)=\dfrac{\sinh x\cos y}{\sinh^2x+\sin^2y}$

$I\,\text{cosech}\,(x-iy)=\dfrac{\cosh x\sin y}{\sinh^2x+\sin^2y}$.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.1

(ಪುಟ 219–220)

1 $\dfrac{\sqrt{2+r+\cos\theta}}{r}$, $r=\sqrt{5+4\cos\theta}$.

2 $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2}\sin\alpha}$, $(\alpha\neq n\pi)$.

3 $\left(2\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)^{-n}.\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}-\dfrac{n\alpha}{2}\right)$, $n<1$

4 $\sqrt{\cos\theta(1+\cos\theta)}$ **5** $e^{c\cos\beta}.\cos(\alpha+c\sin\beta)$.

6 $\sin\alpha\cos(\cos\beta)\cosh(\sin\beta)-\cos\alpha\sin(\cos\beta)\sinh(\sin\beta)$

7 $\sin(\cos\beta)\cosh(\sin\beta)\cos(\alpha-\beta)$
$\quad -\cos(\cos\beta)\sinh(\sin\beta)\sin(\alpha-\beta).$

8 $$\frac{\cos\alpha+(-1)^{n-1}\left[(n+1)\cos(n-1)\alpha+n\cos n\alpha\right]}{2(1+\cos\alpha)}.$$

9 $\cos(\cos\theta)\sinh(\sin\theta).$ **10** $e^{\cos\theta}\,.\,\sin(\sin\theta).$

11 $e^{-\cos\theta}\,.\,\cos(\sin\theta).$ **12** $e^{\cos\theta}\,.\,\cos(\sin\theta).$

13 $$\frac{2(2\cos\theta-1)}{5-4\cos\theta}.$$

ಸೂಚನೆ

(1) ಪುಟ 10 ರ 24 ನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಪುಟ 11 ರ 5 ನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ $-\pi<\theta\leqslant\pi$ ಎಂದು ತಿದ್ದಿ ಓದಬೇಕು.

(2) ಪುಟ 29 ರ 6 ನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ $L_1 \cos(\alpha_2-\alpha_2)$ ವನ್ನು $L_1\cos(\alpha_2-\alpha_3)$ ಎಂದು ತಿದ್ದಿ ಓದಬೇಕು.

(3) ಪುಟ 59 ರ ಮೊದಲನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಅಸಮಾಕರಣ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿಕೊಂಡು ಓದಬೇಕು.

ಅನುಬಂಧ

ಅಂತರ Interval (169)
ಅಕ್ಷ Axis (1)
ಅಕ್ಷರೋಕ್ತಿ Algebraic expression
ಅಛೇದಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆ Nonintersecting system (65)
ಅಜ್ಞಾತ Unknown
ಅಡ್ಡ Horizontal (1)
ಅಡ್ಡಸಾಲು Row
ಅರ್ಧಾಕ್ಷ Semi axis
ಅರ್ಧಿಸು Bisect
ಅನುಮಿತ Corollary
ಅನಂತ Infinite
ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕ Asymptote (141)
ಅನುಪೂರಕ Complementary
ಅನುಪ್ರಸ್ಥ Transverse (86)
ಅನುರೂಪ Corresponding
ಅನುವರ್ತಿ Conjugate (125)
ಅನ್ವಯ Application
ಅಪವರ್ತನ Factor
ಅಪವರ್ತ್ಯ Multiple
ಅಪರ್ಯಾಪ್ತ Infinite
ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣ Positive, anticlockwise
ಅಭಾಗಲಬ್ಧ Irrational
ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ Continuity
ಆಕಾಶ Space (178)
ಆರ್ಗಾಂಡ್‌ಸಮತಲ Argand plane (180)
ಆದೇಶಿಸು Substitute
ಆವರ್ತನೆ Rotation (4)
ಆವೃತಿಸು Circumscribe
ಉತ್ಪನ್ನ Expression, function (161)
ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ Eccentricity (80)
ಉತ್ಕೇಂದ್ರಕೋನ Eccentric angle (111)
ಉಪವೃತ್ತ Auxiliary circle (111)
ಉಭಯಸ್ಪರ್ಶ Double contact (130)
ಊಹ್ಯ Imaginary (179)
ಋಣ Negative
ಋಣಾತ್ಮಕ Clockwise, negative
ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ Concentric
ಏಕಪದಿ Monomial
ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥ Concurrent (27)
ಏಕಮೌಲ್ಯ ಉತ್ಪನ್ನ Onevalued function (167)
ಏಕರೇಖಸ್ಥ Collinear
ಏಕೈಕ Unique (2)
ಐಕ್ಯ Coincide
ಒಟ್ಟು Combined
ಓಟ Gradient, slope (19)
ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ Calculus
ಕನಿಷ್ಠವೃತ್ತ (ಬಿಂದುವೃತ್ತ) point circle
ಕಲನಕ್ರಿಯೆ Differentiation
ಕೇಂದ್ರ Centre
ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ Area (12)
ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ Cartesian
ಕೋಣಾಂಕ Argument, amplitude (181)
ಗಣ Set
ಗಣಾಂಶ Element of a set (176)

ಗುಣ Property
ಗುಣಕ Coefficient
ಗುಣಲಬ್ಧ Product
ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ Geometric progression
ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿ Geometric series
ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ Centre of gravity, centroid (12)
ಘನಸಮೀಕರಣ Cubic equation
ಘನಾಕೃತಿ solid
ಘಾತಮೂಲ Root (190)
ಘಾತ Power
ಘಾತೀಯ ಪ್ರಮೇಯ Exponential theorem
ಚಕ್ರೀಯ Cyclic (118)
ಚರ Variable
ಚಾಲಕ Directrix (80)
ಚಿಹ್ನೆ Sign
ಛೇದಕ Secant
ಛೇದಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆ Intersecting system (65)
ಛೇದನ Intersection (26)
ಛೇದನ ಬಿಂದು Point of intersection
ಜನಕ Generator (71)
ಜನಕರೇಖೆ Generating line (78)
ಜೋಕಿಮ್‌ಸ್ಟಾಲನ ವಿಭಜನಾಸೂತ್ರಗಳು Joachimsthal's ratio formulae (6)
ಜ್ಯಾ Chord
ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ Geometric
ಜೋಡಣೆ Join (7)
ಡಿಮೋಯ್ವರನ ಪ್ರಮೇಯ De Moivre's theorem (186)
ತಾಳೆ Satisfy
ತ್ರಿಕೋನ Triangle
ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ Trigonometry (161)
ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು Trigonometric equation (164)
ತ್ರಿಜ್ಯ Radius
ತ್ರಿಭುಜ Trilateral (12)
ದಿಕ್ಕು, ದಿಶೆ Direction
ದೀರ್ಘವೃತ್ತ Ellipse (82, 107)
ದೀರ್ಘಾಕ್ಷ Major axis (84)
ದೂರಸಮೀಕರಣ Distance equation (21)
ದ್ವಿಪದಿ Binomial
ದ್ವಿಭಾಜಕ Bisector
ಧನ Positive
ಧನಾತ್ಮಕ Anticlockwise, Positive
ಧ್ರುವ Pole (9)
ಧ್ರುವೀಯ Polar (9)
ನವಬಿಂದು ವೃತ್ತ Nine-points circle
ನಾಭಿ Focus
ನಾಭೀಚಾಲಕಗುಣ Focus directrix property (80)
ನಾಭೀಲಂಬ Latus rectum (82)
ನಿಜ ಬೆಲೆ Absolute value
ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ Identity
ನಿರ್ದೇಶಕ Coordinate
ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆ Coordinate system (1)
ನಿರ್ಧಾರಕಗಳು Determinants
ನಿರ್ಬಂಧ Limitation
ನಿಯಮ Condition
ನಿಯಾಮಕ ವೃತ್ತ Director circle (108)

ನಿಯೋಜಿತ ಸಂಖ್ಯಾಯುಗ್ಮ Ordered pair of numbers
ನಿಶ್ಚರಗಳು Invariants
ನಿಷ್ಪತ್ತಿ Ratio
ನೀಟ Vertical
ನೀಟಸಾಲು Column
ಪಥ Locus (15)
ಪಥಸಮೀಕರಣ Equation to the locus
ಪದ Term
ಪರಮಾವಧಿ ಬಿಂದುಗಳು Limiting points (66)
ಪರಿಕರ್ಮ Operation (176)
ಪರಿಧಿ Circumference
ಪರಿಭಾಷೆ Technical language
ಪರಿವೃತ್ತ Circumcircle
ಪಾದ Quadrant
ಪುನರಾವರ್ತನೆ Repetition
ಪೂರಕ Supplementary
ಪೆರಾಬೊಲಾ Parabola (81), (91)
ಪ್ರತಿಘಾತ Logarithm (208)
ಪ್ರತಿಲೋಮ Inverse
ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು Inverse functions (167)
ಪ್ರದಕ್ಷಿಣ Clockwise, negative
ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆ Principal value (170)
ಪ್ರಾಚಲ Parameter (22)
ಪ್ರಾಚಲಿಕ Parametric (22)
ಬಹುಪದಿ Polynomial
ಬಹುಮೌಲ್ಯ Many-valued
ಬಾಗು Inclination (19)
ಬಿಂದು Point
ಬಿಂದುಪಥ Locus of a point
ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ Algebraic geometry, analytical geometry
ಬೆಲೆ Value
ಬೇಕಾದ ಮತ್ತು ಸಾಕಾದ Necessary and sufficient (33)
ಬೈಜಿಕ Algebraic
ಬೈಜಿಕ ಮೊತ್ತ Algebraic sum
ಭಾಗಲಬ್ಧ Rational
ಭಿನ್ನರಾಶಿ Fraction
ಮಧ್ಯಕ Mean
ಮಾಡುಲಸ್ Modulus (181)
ಮೂಲ, ಮೂಲಬಿಂದು Origin
ಮೂಲಗಳು Roots
ಮೂಲರೇಖೆ Initial line
ಮೂಲಾಕ್ಷ Radical axis (60)
ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರ Radical centre (62)
ಮೂಲಾಂಶ Element
ಮಿಶ್ರಸಮತಲ Complex plane (180)
ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆ Complex number (175)
ರೇಖಾಂತರ Intercept (19)
ಲಘುಕೋನ Acute angle
ಲಂಬ Perpendicular, normal
—ಕೇಂದ್ರ Orthocentre
—ಕೋನ Right angle
—ಜ್ಯಾ Normal chord
—ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು Rectangular coordinates (2)
—ಪಾದ Foot of the normal (97)

–ವೃತ್ತಗಳು Orthogonal circles (59)
–ವೃತ್ತೀಯ Right circular (78)
–ಸ್ಪರ್ಶಿತ Evolute
ಲಂಬೀಯ Rectangular
ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ Rectangular hyperbola (153)
ವಕ್ರರೇಖೆ Curve (27)
ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ Quadratic equation
ವಜ್ರಾಕೃತಿ Rhombus
ವಾಸ್ತವ Real (174)
ವೃತ್ತ Circle (43)
ವಿಕೃತರೂಪ Degenerated form (64)
ವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ Discontinuity
ವಿಭಜನಾಸೂತ್ರ Division formula
ವಿನಿಮಯ Current
ವಿಲೋಮ Converse
ವಿಶೇಷ ಪರಿಸ್ಥಿತಿ Special case (36)
ವಿಶ್ಲೇಷಣ ಗಣಿತ Analysis
ವಿಷಮ Odd
ವಿಸರ್ಜಿಸು Eliminate
ವಿಸ್ತರಣೆ Expansion (193)
ವ್ಯವಸ್ಥೆ System (8)
ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ Reciprocal
ವ್ಯಾಖ್ಯೆ Definition
ವ್ಯಾಸ Diameter (44)
ವ್ಯಾಸೀಯವಿರೋಧ Diametrically opposite
ಶಂಕು Cone (78)
ಶಂಕುಜ Conic (79)
ಶಂಕುಚ್ಛೇದ Conic (79)
ಶೃಂಗ Vertex (57)
ಶೃಂಗದೂರ Distance from th vortex (97)
ಶೃಂಗಾರ್ಧಕೋನ Semi vertical angl (79)
ಶಕ್ತಿ Power (61)
ಶುದ್ಧ ವರ್ಗ Perfect square
ಶೂನ್ಯ Zero
ಶೂನ್ಯವಾಗು Vanish
ಶೋಧಕ Discriminant
ಶ್ರೇಢಿ Progression
ಶ್ರೇಣಿ Series (193)
ಸಂಕೇತ Symbol
ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯೂಹ Number system
ಸಂಗಮ Coincidence
ಸಂಧಿಸು Meet
ಸಂಪ್ರದಾಯ Convention (170)
ಸಂಬಂಧ Relationship
ಸದಿಶಾ In the same direction, vector
ಸದಿಶಾಕಾಶ Vector space (178)
ಸಮ Even, equal
ಸಮಕೋನ Right angle
ಸಮತಲ Plane
ಸಮದ್ವಿಭುಜತ್ರಿಭುಜ Isosceles triangle
ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಭುಜ Equilateral triangle
ಸಮಭಾಜಕ, ಸಮದ್ವಿಭಾಜಕ Bisector
ಸಮರೂಪ Similar
ಸಮಾಂಗ Symmetrical (80)

ಸಮಾಂಗತ್ವ Symmetry
ಸಮಾಂಗಾಕ್ಷ Axis of symmetry
ಸಮಾಂತರ Arithmetic
ಸಮಾನ Equivalent
ಸಮಾನಾಂತರ Parallel
ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ Parallelogram
ಸಮಾನ ಘಾತ Homogeneous (39)
ಸಮಾನಘಾತಿಸು Homogenise
ಸಮೀಕರಣ Equation
ಸರಳರೇಖೆ Straight line (15)
ಸರಳೀಕರಣ Simplification
ಸರ್ವಸಮ Identical
ಸಹಗಾಮಿ Corresponding
ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ Coaxal (63)
ಸಹಲಂಬ Conormal (114)
ಸಾಮಾನ್ಯ General
ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಣ Generalisation
ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪ General form
ಸಾಮಾನ್ಯಜ್ಯಾ Common chord
ಸಾದೃಶ್ಯ ಕೇಂದ್ರ Centre of similitude
ಸಾಂಕೇತಿಕ Symbolic
ಸಾಂಖಿಕ Numerical
ಸಿದ್ಧಾಂತ Theory
ಸುಲಭ ರೂಪ Simplified form
ಸೂತ್ರ Formula
ಸ್ಪರ್ಶಕ Tangent
ಸ್ಪರ್ಶಕಜ್ಯಾ Chord of contact (65)
ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು Point of contact
ಸ್ಪರ್ಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆ Touching system (65)
ಸ್ಥಿರ Constant
ಸ್ಥಾನಪಲ್ಲಟನ Shifting, transformation (3)
ಸ್ವಾನುವರ್ತಿ Self-conjugate (57)
ಹರಾತ್ಮಕ Harmonic
ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ Hyperbola (83, 140)
ಹೈಪರ್ಬೋಲೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು Hyperbolic functions (202)
ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷ Minor axis (94)

GLOSSARY

Absolute value ನಿಜ ಬೆಲೆ
Acute angle ಲಘುಕೋನ
Algebra ಬೀಜಗಣಿತ
Algebraic ಬೈಜಿಕ
Algebraic sum ಬೈಜಿಕ ಮೊತ್ತ
Analysis ವಿಶ್ಲೇಷಣ ಗಣಿತ
Analytical geometry ಬೀಜರೇಖಾ ಗಣಿತ
Angle ಕೋನ
Anticlockwise ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣ, ಧನಾತ್ಮಕ
Application ಅನ್ವಯ
Area ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ
Argand plane ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಸಮತಲ
Arithmetic progression ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ
Asymptote ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕ
Auxiliary circle ಉಪವೃತ್ತ
Axis ಅಕ್ಷ
Axis of symmetry ಸಮಾಂಗಾಕ್ಷ
Binomial theorem ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯ
Bisector ದ್ವಿಭಾಜಕ
Calculate ಎಣಿಸು, ಲೆಕ್ಕಮಾಡು
Calculus ಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರ
Cartesian ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್
Centre ಕೇಂದ್ರ
Centroid, centre of gravity ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ
Centre of similitude ಸಾದೃಶ್ಯ ಕೇಂದ್ರ
Change of axes ಅಕ್ಷಗಳ ಸ್ಥಾನ ಪಲ್ಲಟನ
Chord ಜ್ಯಾ
Chord of Contact ಸ್ಪರ್ಶಕಜ್ಯಾ
Circumcircle ಪರಿವೃತ್ತ
Circumference ಪರಿಧಿ
Circumscribe ಆವೃತಿಸು
Circumradius ಪರಿತ್ರಿಜ್ಯ
Circumcentre ಪರಿ ಕೇಂದ್ರ
Clockwise ಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ, ಋಣಾತ್ಮಕ
Coaxal ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ
Coefficient ಗುಣಕ
Coincide ಐಕ್ಯವಾಗು, ಸಂಗಮಿಸು
Collinear ಏಕರೇಖಸ್ಥ
Column ನೀಟಸಾಲು
Combined equation ಒಟ್ಟಾದ ಸಮೀಕರಣ
Complementary ಅನುಪೂರಕ
Complex number ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆ
Complex plane ಮಿಶ್ರ ಸಮತಲ
Concentric ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ
Concurrent ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥ
Condition ನಿಯಮ
Cone ಶಂಕು
Conic ಶಂಕುಜ
Conormal ಸಹಲಂಬ
Concyclic ಚಕ್ರೀಯ

Contact ಸ್ಪರ್ಶ
Continuity ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ
Convention ಸಂಪ್ರದಾಯ
Converse ವಿಲೋಮ
Coordinate ನಿರ್ದೇಶಕ
Coplanar ಏಕಸಮತಲೀಯ, ಸಹ ಸಮತಲೀಯ
Corresponding ಸಹಗಾಮಿ, ಅನುರೂಪ
Cubic equation ಘನ ಸಮೀಕರಣ
Current coordinate ವಿನಿಮಯ ನಿರ್ದೇಶಕ
Cyclic ಚಕ್ರೀಯ
Define ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸು
Definition ವ್ಯಾಖ್ಯೆ
De Moivre's theorem ಡಿಮಾಯ್ವರನ ಪ್ರಮೇಯ
Degenerated form ವಿಕೃತ ರೂಪ
Derivative ನಿಷ್ಪನ್ನ
Diagonal ಕರ್ಣ
Diameter ವ್ಯಾಸ
Diametrically opposite ವ್ಯಾಸೀಯ ವಿರೋಧ
Differentiation ಕಲನಕ್ರಿಯೆ
Differentiate ಕಲನಿಸು
Directrix ಚಾಲಕ
Director circle ಚಾಲಕ ವೃತ್ತ
Direction ದಿಶೆ
Discontinuity ವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ
Discriminant ಶೋಧಕ
Distance ದೂರ
Distance from the vertex ಶೃಂಗದೂರ
Division formula ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರ
Double contact ಉಭಯಸ್ಪರ್ಶ
Eccentricity ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ
Eccentric angle ಉತ್ಕೇಂದ್ರ ಕೋನ
Element ಮೂಲಾಂಶ
Element of a set ಗಣಾಂಶ
Eliminate ವಿಸರ್ಜಿಸು
Ellipse ದೀರ್ಘವೃತ್ತ
Equal ಸಮ
Equation ಸಮೀಕರಣ
Equiangular ಸಮಾನ ಕೋನೀಯ
Equivalent ಸಮಾನ
Equilateral triangle ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಭುಜ
Even ಸಮ
Evolute ಲಂಬಸ್ಪರ್ಶಿತ
Expansion ವಿಸ್ತರಣೆ
Expression ಉತ್ಪನ್ನ
Exponential theorem ಘಾತೀಯ ಪ್ರಮೇಯ
Factor ಅಪವರ್ತನ
Fixed ಸ್ಥಿರ
Focus ನಾಭಿ
Focus-directrix property ನಾಭೀ ಚಾಲಕ ಗುಣ
Foot ಪಾದ
Foot of the normal ಲಂಬ ಪಾದ
Formula ಸೂತ್ರ
Fraction ಭಿನ್ನರಾಶಿ
Function ಉತ್ಪನ್ನ
Generator ಜನಕ
General ಸಾಮಾನ್ಯ

Generalise ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸು
Geometric ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ
Geometric progression ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ
Geometric series ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿ
Gradient ಓಟ
Harmonic ಹರಾತ್ಮಕ
Homogeneous ಸಮಾನ ಘಾತ
Homogenise ಸಮಾನಘಾತಿಸು
Horizontal ಅಡ್ಡಸಾಲು
Hyperbola ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ
Hyperbolic ಹೈಪರ್ಬೋಲೀಯ
Identity ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ
Identical ಸರ್ವಸಮ
Imaginary ಊಹ್ಯ
Inclination ಬಾಗು
Infinite ಅನಂತ, ಅಪರ್ಯಾಪ್ತ
Inequality ಅಸಮೀಕರಣ
Interchange ಅದಲು ಬದಲು
Intersect ಛೇದಿಸು
Intersection ಛೇದನ
Intersecting system ಛೇದಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆ
Interval ಅವಕಾಶ, ಅಂತರ
Initial line ಮೂಲ ರೇಖೆ
Intercept ರೇಖಾಂತರ
Invariants ನಿಶ್ಚರಗಳು
Irrational ಅಭಾಗಲಬ್ಧ
Isosceles triangle ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಭುಜ
Joachimsthal ಜೋಕಿಮ್‌ಸ್ಥಾಲ್
Join ಜೋಡಣೆ
Latus rectum ನಾಭೀಲಂಬ
Limitation ನಿರ್ಬಂಧ
Limit ಪರಮಾವಧಿ
Limiting points ಪರಮಾವಧಿ ಬಿಂದುಗಳು
Locus ಪಥ
Logarithm ಪ್ರತಿಘಾತ
Major ಪ್ರಧಾನ
Major axis ದೀರ್ಘಾಕ್ಷ
Manyvalued ಬಹು ಬೆಲೆಯಿರುವ
Mean ಮಧ್ಯಕ
Meet ಸಂಧಿಸು
Midpoint ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು
Minor axis ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷ
Modulus ಮಾಡುಲಸ್
Monomial ಏಕಪದಿ
Moving ಚರ
Necessary and sufficient ಬೇಕಾದ ಮತ್ತು ಸಾಕಾದ
Negative ಋಣಾತ್ಮಕ
Nonintersecting system ಅಛೇದಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆ
Nine-points circle ನವಬಿಂದು ವೃತ್ತ
Normal ಲಂಬ
Normal chord ಲಂಬ ಜ್ಯಾ
Number ಸಂಖ್ಯೆ
Number system ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯವಸ್ಥೆ
Numerical ಸಾಂಖಿಕ
Odd ವಿಷಮ
Onevalued ಒಂದೇ ಬೆಲೆಯಿರುವ
Ordered pair ನಿಯೋಜಿತ ಯುಗ್ಮ
Origin ಮೂಲ, ಮೂಲಬಿಂದು
Operation ಪರಿಕರ್ಮ

Orthocentre ಲಂಬ ಕೇಂದ್ರ
Orthogonal circles ಲಂಬ ವೃತ್ತಗಳು
Orthogonal system ಲಂಬ (ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ) ವ್ಯವಸ್ಥೆ
Parabola ಪೆರಾಬೊಲಾ
Parallel ಸಮಾನಾಂತರ
Parallelogram ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ
Perfect square ಶುದ್ಧವರ್ಗ
Perpendicular ಲಂಬ
Plane ಸಮತಲ
Point ಬಿಂದು
Point of contact ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು
Pole ಧ್ರುವ
Polar ಧ್ರುವೀಯ
Polar system ಧ್ರುವೀಯ ವ್ಯವಸ್ಥೆ
Polynomial ಬಹುಪದಿ
Positive ಧನಾತ್ಮಕ
Power ಶಕ್ತಿ, ಘಾತ
Property ಗುಣ
Product ಗುಣಲಬ್ಧ
Principal value ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆ
Quadrant ಪಾದ
Quadratic equation ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ
Quotient ಭಾಗಲಬ್ಧ
Radical axis ಮೂಲಾಕ್ಷ
Radical centre ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರ
Radius ತ್ರಿಜ್ಯ
Ratio ನಿಷ್ಪತ್ತಿ
Rational ಭಾಗಲಬ್ಧ
Real ವಾಸ್ತವ
Reciprocal ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ
Rectangular coordinates ಲಂಬ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು
Rectangular hyperbola ಲಂಬ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ
Relation ಸಂಬಂಧ
Repetition ಪುನರಾವರ್ತನೆ
Restriction ನಿರ್ಬಂಧ
Rhombus ವಜ್ರಾಕೃತಿ
Right angle ಲಂಬಕೋನ
Right circular cone ಲಂಬವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕು
Root ಮೂಲ, ಘಾತ ಮೂಲ
Rotation ಆವರ್ತನೆ
Row ಅಡ್ಡಸಾಲು
Satisfy ತಾಳೆಮಾಡು
Secant ಛೇದಕ
Semiaxis ಅರ್ಧ ಅಕ್ಷ
Self-conjugate ಸ್ವಾನುವರ್ತಿ
Sequence ಶ್ರೇಢಿ
Series ಶ್ರೇಣಿ
Shift ಸ್ಥಾನಾಂತರಿಸು
Sign ಚಿಹ್ನೆ
Similar ಸಮರೂಪ
Simplify ಸರಳೀಕರಿಸು
Slope ಓಟ
Solid ಘನ
Space ಆಕಾಶ
Special case ವಿಶೇಷ ಸಂದರ್ಭ
Square ವರ್ಗ, ಚೌಕ
Straight line ಸರಳರೇಖೆ
Substitute ಆದೇಶಿಸು

Summary ಸಾರಾಂಶ
Supplementary ಪೂರಕ
Symbol ಸಂಕೇತ
Symmetry ಸಮಾಂಗತ್ವ
System ವ್ಯವಸ್ಥೆ
Tangent ಸ್ಪರ್ಶಕ
Technical language ಪರಿಭಾಷೆ
Term ಪದ
Theory ಸಿದ್ಧಾಂತ
Theorem ಪ್ರಮೇಯ
Touching system ಸ್ಪರ್ಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆ
Transversal ಛೇದಕ
Transformation ಪರಿವರ್ತನೆ
Triangle ತ್ರಿಕೋನ
Trilateral ತ್ರಿಭುಜ
Unique ಏಕೈಕ
Unknown ಅಜ್ಞಾತ
Value ಬೆಲೆ
Vanish ಶೂನ್ಯವಾಗು
Variable ಚರ
Vertical ಲಂಬ, ನೀಟ
Vertex ಶೃಂಗ
Vector ಸದಿಶ
Zero ಶೂನ್ಯ

225–68. ಬೆಂಗಳೂರು ಪ್ರೆಸ್, ಬೆಂಗಳೂರು–18

ಪ್ರಕಟಣೆಗಳು

ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕಗಳು

		ರೂ.
1	ಪ್ರೀಯುನಿವರ್ಸಿಟಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಭಾಗ 1, ಬೀಜಗಣಿತ ಮತ್ತು ಸುಲಭ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ .. .. —ಪ್ರೊ॥ ಎಫ್. ಜಿ. ನೊರೊನ್ಹಾ ಮತ್ತು ಇತರರು	4–00
2	ಕಾವ್ಯಲಹರಿ (ಪಿ.ಯು.ಸಿ.) .. .. —ಡಾ॥ ರಂ. ಶ್ರೀ. ಮುಗಳಿ ಮತ್ತು ಇತರರಿಂದ ಸಂಪಾದಿತ	2–00
3	ಮನಃಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ (I ಬಿ.ಎ.) .. .. —ಎಸ್. ಕೆ. ರಾಮಚಂದ್ರರಾವ್	3–50
4	ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ (I ಬಿ.ಎಸ್‌ಸಿ.) .. —ಜಿ. ಟಿ. ನಾರಾಯಣರಾವ್	3–20
5	ರಾಜ್ಯಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ (I ಬಿ.ಎ.) .. —ಹೆಚ್. ಆರ್. ದಾಸೇಗೌಡ ಮತ್ತು ಎಂ. ಎ. ಸಿಂಗಮ್ಮಾಳ್	3–80
6	ಸಂಗೀತ ಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರಕಾಶಿಕೆ (I ಬಿ.ಎ.) —ಟಿ. ಆರ್. ನಾಗರತ್ನ	
7	ಸಂಗೀತ ಶಾಸ್ತ್ರ ಬೋಧಿನಿ (ಪಿ.ಯು.ಸಿ.) —ಜಿ. ಚನ್ನಮ್ಮ	
8	ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ (ಪಿ.ಯು.ಸಿ.) —ಹೆಚ್. ಆರ್. ಸಾಖರೆ	
9	ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ (ಪಿ.ಯು.ಸಿ.) —ಬಿ. ವಿ. ನಾರಾಯಣರಾವ್	
10	ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ (I ಬಿ.ಎಸ್‌ಸಿ.) —ಕೆ. ಶೇಷಾದ್ರಿ ಅಯ್ಯಂಗಾರ್	
11	ವಾಣಿಜ್ಯಶಾಸ್ತ್ರ (ಪಿ.ಯು.ಸಿ.) —ಟಿ. ಹೆಚ್. ನಾರಾಯಣರಾವ್	
12	ಭೂಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರ (ಪಿ.ಯು.ಸಿ.) —ಎ. ಕುಮಾರ ಸ್ವಾಮಿ	
13	ಪ್ರೀಯುನಿವರ್ಸಿಟಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಭಾಗ 2, ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ —ಪ್ರೊ॥ ಎಫ್. ಜಿ. ನೊರೊನ್ಹಾ ಮತ್ತು ಇತರರು	

ಪಠ್ಯೇತರ ಪುಸ್ತಕ

1	ಕುದುರೆಮುಖದೆಡೆಗೆ (ಪ್ರವಾಸ ಚಿತ್ರ) .. .. —ಜಿ. ಟಿ. ನಾರಾಯಣರಾವ್	3–00